LE TRAITÉ SUR L'ANALYSE ET LA SYNTHESE D'IBRÆHIM IBN SINÆN[1]

Dr. Hélène Bellosta

(Institut Français d'Études Arabes de Damas)

Cet article a été publié dans: "*Recherches sur la tradition scientifique arabe – Actes de la Rencontre syro-Libanaise de recherche sur la tradition scientifique arabe*". Publications de l'Université Libanaise 2004; pp. 313-333.

LE TRAITÉ SUR L'ANALYSE ET LA SYNTHESE D'IBRÆHIM IBN SINÆN[2]

Dr. Hélène Bellosta

(Institut Français d'Études Arabes de Damas)

Le problème de l'analyse et de la synthèse traverse en filigrane toute l'histoire des mathématiques, de l'antiquité au dix-neuvième siècle; cependant si analyse et synthèse sont partie intégrante de la pratique des mathématiciens, rares sont ceux qui, dépassant des considérations pratiques, leur ont consacré un traité. C'est pourquoi le traité d'Ibræhîm Ibn Sinæn[3], mathématicien du X[e] siècle, portant sur l'analyse et la synthèse dans les problèmes de géométrie revêt dans ce contexte une importance toute particulière: c'est le premier traité, au sens propre du terme, de toute l'histoire des mathématiques, à être consacré à ce sujet. En relation avec lui, Ibn Sinæn y traite également du problème connexe de la classification des problèmes et des propositions.

Les seuls auteurs avant Ibn Sinæn à traiter du problème de l'analyse et de la synthèse (autres qu'Aristote et Platon qui y fait brièvement allusion[4]) sont Pappus dans sa préface au livre VII de *La Collection mathématique*[5], Proclus dans le second prologue de son *Commentaire sur le premier livre des Éléments d'Euclide*[6] et le Pseudo-Euclide dans un court passage[7]. Le texte d'Ibn Sinæn soulève immédiatement un certain nombre de questions: s'agit-il d'une redite, plus détaillée certes, et plus précise, de ce que l'on trouve chez les auteurs grecs déjà cités, ou assiste-t-on à une modification des termes dans lesquels se pose le problème de l'analyse et de la synthèse et à l'émergence de nouvelles problématiques ? Plus simplement, quelle a été l'influence de ce texte sur les mathématiciens postérieurs ? Avant de tenter de répondre à ces questions, il nous faut revenir au texte d'Ibn Sinæn.

Le titre exact du traité d'Ibn Sinæn est: *Traité sur la méthode de l'analyse et de la synthèse dans les problèmes de géométrie*. Dans son introduction, après avoir souligné l'originalité de son propos, Ibn Sinæn annonce le plan de son traité. Celui-ci se compose de quatre parties:

- les différentes catégories de problèmes, illustrées par des exemples;
- l'analyse, et le rôle qu'elle joue dans la détermination du genre d'un problème;
- la synthèse;

- une réponse à ceux qui critiquent l'analyse telle qu'elle est habituellement pratiquée par les géomètres et l'exposé détaillé sur un exemple de ce que devrait être, selon lui, une véritable analyse.

I LA CLASSIFICATION DES PROBLEMES

La méthode de l'analyse et de la synthèse, telle qu'elle va nous être exposée ici, s'applique, comme le titre même du traité l'indique, à la résolution de problèmes et non à la démonstration de théorèmes. Ibn Sinæn ne précise pas la différence entre problème et théorème, mais donne quatre exemples d'énoncés, deux de problèmes et deux de théorèmes, et indique ensuite que son étude ne traite que de la résolution des deux premiers, c'est-à-dire des problèmes. La distinction entre un problème et un théorème est toutefois assez difficile à établir, une même propriété étant parfois apte, comme l'a fort judicieusement fait remarquer M. Chasles, à être énoncée sous la forme d'un théorème, d'un porisme ou d'un problème[8]. La notion même de problème a pu évoluer au cours du temps et selon les mathématiciens: un énoncé *comme inscrire un angle droit dans un demi-cercle donné*par exemple, qui pour un philosophe néo-platonicien comme Proclus[9], est un théorème et non un problème, est considéré comme un véritable problème par Ibn Sinæn. La différence essentielle entre problème et théorème est que dans un théorème (correctement formulé) la conclusion est clairement énoncée, alors que dans un problème elle doit d'abord être découverte. Pour démontrer un théorème il suffit alors de trouver et de mettre en forme les inférences logiques qui permettent de passer des hypothèses à la conclusion (d'où l'importance dans ce cas de la synthèse, *ars demonstrandi*); en revanche, lorsqu'il s'agit de résoudre un problème, on doit d'abord découvrir la conclusion avant d'entreprendre de démontrer au moyen de la synthèse que cette conclusion découle bien des hypothèses (d'où l'importance dans ce cas de l'analyse, *ars inveniendi*). Qu'Ibn Sinæn, mathématicien rigoureux, n'ait pas jugé bon de définir ce que sont théorèmes et problèmes, nous autorise à penser que son propos dans ce traité n'est pas de préciser une hypothétique différence entre un théorème et un problème, mais plutôt d'établir, en relation avec la classification des problèmes, une typologie des propositions mathématiques, notion très liée comme nous le verrons à la théorie de l'analyse et la synthèse.

Quoi qu'il en soit Ibn Sinæn regroupe les problèmes en deux grandes catégories comportant chacune des sous-catégories:

1 Les problèmes dont les hypothèses et les conditions sont suffisantes

(c'est-à-dire suffisantes pour que le problème ait des solutions en nombre fini, ou qu'il n'ait pas de solution; ces problèmes constituent l'archétype de tous les problèmes).
Cette catégorie des problèmes dont les hypothèses sont suffisantes comporte à son tour deux sous-catégories.

1.1 *Les problèmes qui ont un nombre fini de solutions*

Ces problèmes sont nommés tout au long du traité problèmes vrais (*ÒaÌîÌ*), ou problèmes achevés (*kæmil*).
EXEMPLE 1: *partager un segment selon un rapport donné* (*Éléments* VI, 10).

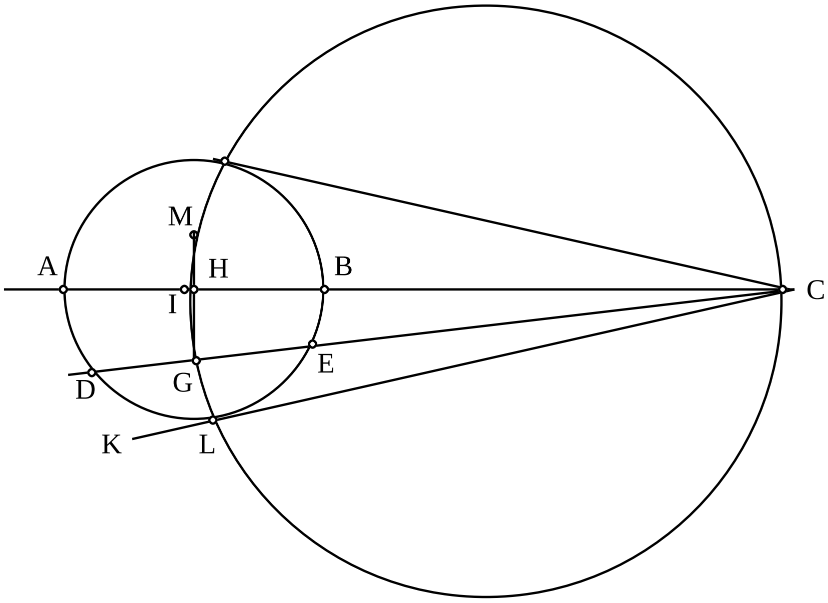
1.2 *Les problèmes qui n'ont pas de solution*

Ces problèmes sont alors qualifiés de problèmes impossibles (*muÌæl*), ou faux (*bæ†il*). Impossible est pris ici au sens positif du terme: ces problèmes sont ceux pour lesquels on démontre qu'il n'existe pas d'objet satisfaisant aux hypothèses et non ceux que l'on ne sait ou ne peut pas résoudre (c'est-à-dire les problèmes indémontrables ou indécidables).

EXEMPLE 2: *partager un segment en deux parties dont le produit est égal au carré du segment* (cf. exemple 4 *infra*).

EXEMPLE 3: *mener d'un point extérieur à un cercle une sécante telle que le double de l'angle que fait cette sécante avec le diamètre passant par ce point soit plus petit que l'angle que fait la tangente issue de ce point avec ce diamètre, et qu'en outre si l'on mène du milieu du segment de la droite cherchée intérieur au cercle, la perpendiculaire au diamètre passant par le point donné, cette perpendiculaire soit égale au quart du diamètre*, problème impossible.

ANALYSE:



Soit C le cercle donné, de diamètre *AB*, de centre *I*, *C* le point donné de la droite *AB* extérieur à C, soit *CT* la tangente à C issue de *C*, supposons le problème résolu et soit (*CDE*) la sécante cherchée, sécante au cercle C en *D* et *E*, telle que $2(\angle ACE) < (\angle ACT)$, et que, si *G* est le milieu de [*DE*], *H* le projeté orthogonal de *G* sur (*AB*), $GH = \frac{AB}{4}$.

GI est la médiatrice de [*DE*] [(*G* milieu de [*DE*]),

donc $(GI) \perp (GC)$ et $G \in$ C' cercle de diamètre [*IC*];

soit *K* un point tel que $(\angle KCI) = 2(\angle ACE)$ et soit *L* le second point d'intersection de la droite (*CK*) et de C'; soit *M* le symétrique orthogonal de *G* par rapport à (*AB*);

$GM = 2HG = \frac{AB}{2}$, donc arcGM = 2arcIG = arcIL, donc $\mathrm{IL} = \frac{AB}{2}$ et $L \in$ C;

$(IL) \perp (CL)$ car $L \in$ C'cercle de diamètre[*CI*],

(*CL*) est donc tangente à C en *L* et $2(\angle ACE) = (\angle ACL) = (\angle ACT)$, ce qui est contraire à l'hypothèse $2(\angle ACE) < (\angle ACT)$; ce problème n'a donc pas de solution.

Notons cependant que si l'on supprimait la condition $2(\angle ACE) < (\angle ACT)$, ce problème serait vrai. Tel qu'il est posé, ce problème pourrait donc également être rangé dans la catégorie des problèmes ayant des hypothèses surabondantes et contradictoires.

Pour tous ces problèmes dont les hypothèses et les conclusions sont suffisantes, l'analyse met alors en évidence le fait que le problème a ou n'a pas de solution, et permet, dans le premier cas de déterminer le ou les objets cherchés (en nombre fini), et dans le second cas de montrer qu'il n'existe pas d'objet satisfaisant aux conditions posées. Le nombre de solutions du problème est déterminé par Ibn Sinæn à la fin de la synthèse: il montre la plupart du temps, par un raisonnement par l'absurde, que le problème n'a pas d'autre solution que les solutions déjà déterminées.

2 Les problèmes dont il est nécessaire de modifier les hypothèses

(pour se ramener à des problèmes vrais ou impossibles, archétypes de tous les problèmes). Cette catégorie comporte à son tour trois sous-catégories:

2.1 *Les problèmes avec discussion (masæ'il maÌdºda)*

Ce sont les problèmes qui nécessitent une « disjonction » (*isti†næ'*), ou une « délimitation » (*taÌdîd* / *diorismos*), celle des conditions (*‡aræ'i†*) nécessaires d'existence d'une solution, c'est-à-dire ceux qui donnent lieu à une discussion: si telle condition, portant sur les données du problème, est satisfaite, ils ont des solutions, en nombre fini, si elle ne l'est pas, ils n'ont pas de solution. C'est l'analyse qui, pour Ibn Sinæn, permet de déterminer la condition nécessaire à l'existence de solutions, la discussion étant présentée dans la synthèse.

EXEMPLE 4: *partager un segment en deux parties dont le produit est égal à une surface donnée* (A, B et c étant donnés, déterminer un point E du segment $[AB]$ tel que: $EA.EB = c$), problème avec discussion.

Ce problème n'a de solution que si $c \leq \frac{AB^2}{4}$, et dans ce cas il a une ou deux solutions. C'est le problème bien connu de l'application d'une surface donnée sur une droite donnée, par défaut d'un carré (Euclide, *Éléments* VI 27 et 28).

ANALYSE:

Supposons le problème résolu, et soit E le point cherché tel que $EA.EB = c$,

- si E est le milieu de $[AB]$, alors $EA.EB = \frac{AB^2}{4}$, et $c = \frac{AB^2}{4}$,

- si E n’est pas le milieu de $[AB]$, soit D le milieu de $[AB]$,

puisque $EA.EB + ED^2 = \frac{AB^2}{4}$ (*Éléments* II 5), $c + ED^2 = \frac{AB^2}{4}$;

mais c et $\frac{AB^2}{4}$ sont données, ED^2 est donc connue;

D est donné, E est donc connu, et $c < \frac{AB^2}{4}$.

L’analyse permet donc à la fois de montrer que E est connu et de trouver une condition nécessaire à l’existence de solutions (ici $c \leq \frac{AB^2}{4}$).

SYNTHESE:

- si $c \leq \frac{AB^2}{4}$,

ou bien $c = \frac{AB^2}{4}$ et D milieu de $[AB]$ est solution;

ou bien $c < \frac{AB^2}{4}$, soit $g = \frac{AB^2}{4} - c$ et soit E un point de $[AB]$, tel que $ED^2 = g$;

E est alors le point cherché: puisque $c + ED^2 = \frac{AB^2}{4} = EA.EB + ED^2$ alors $EA.EB = c$;

- si $c > \frac{AB^2}{4}$, le problème n’a pas de solution.

Comme à son habitude dans des cas semblables Ibn Sinæn reprend, mot pour mot, ce qu’il a déjà dit dans l’analyse, jusqu’à la conclusion $c \leq \frac{AB^2}{4}$; il dit alors: mais on avait supposé que $c > \frac{AB^2}{4}$, le problème n’a donc pas de solution. Il démontre ensuite par l’absurde que le problème, dans le cas où $c \leq \frac{AB^2}{4}$, a seulement deux solutions.

Dans ce problème avec discussion, la discussion porte sur le paramètre c.

2.2 *Les problèmes indéterminés (masæ‘il sayyæla)*

Ces problèmes indéterminés sont eux-mêmes divisés en deux sous-catégories:

2.2.1 *Les problèmes indéterminés proprement dits*

Ce sont ceux qui ont une infinité de solutions. Ces problèmes soulèvent la question du degré d’indétermination de la solution, ce degré étant mesuré par l’indétermination de l’un des deux paramètres “position” ou “grandeur” qui définissent la solution (le troisième paramètre “forme” étant, dans tous les exemples cités, déterminé).

EXEMPLE 5: *soient (*AB*) et (*CD*) deux droites parallèles données,* E *un point de la droite (*AC*), distinct de* A *et de* C*; mener de* E *une sécante (*EGH*) à (*AB*) et (*CD*) telle que:* $\frac{EG}{GH} = \frac{EA}{AC}$, problème indéterminé.

EXEMPLE 6: *trouver deux segments de droites dans un rapport donné*.

EXEMPLE 7: *tracer un cercle tangent à deux droites parallèles données*.

Les exemples 5, 6 et 7 diffèrent en ce que le degré d’indétermination de la solution n’est pas le même dans chaque cas: dans l’exemple 5, toute droite issue de *E* est solution, tandis que dans l’exemple 6, le premier segment ayant été choisi, la grandeur du second est donnée, mais non sa position, et que dans l’exemple 7, la grandeur du cercle cherché est donnée et le lieu de son centre est sur une droite donnée. Cependant, si le fait de donner ces trois exemples montre bien qu’Ibn Sinæn avait sans doute l’intuition de la notion de degré d’indétermination, cette notion n’est pas abordée dans cet ouvrage.

2.2.2 *Les problèmes indéterminés donnant lieu à une discussion*

Au terme de cette discussion, ces problèmes, ou bien n’ont pas de solution, ou bien en ont une infinité (le cas de problèmes qui au terme d’une discussion auraient soit un nombre fini, soit une infinité de solutions, n’est pas envisagé dans ce traité).

EXEMPLE 8: C *étant un cercle donné,* C *un point extérieur à ce cercle, mener une droite (*CDE*), sécante à* C *en* D *et* E*, telle que:* CD.CE = s*, où* s *est une surface donnée*, problème indéterminé avec discussion.

Soit (CA) une tangente à C issue de C, alors $CD.CE = CA^2$ (*Éléments* III 36);

- si $s = CA^2$, toute sécante à C issue de C est solution;
- si $s \neq CA^2$, le problème n’a pas de solution.

On pourrait s'attendre à voir figurer dans cette catégorie les problèmes de lieux. Cependant, si les problèmes de lieux sont bien, avec la définition qu'en donne Ibn Sinæn, des problèmes indéterminés, il n'en est nullement fait mention dans cet ouvrage, l'objectif d'Ibn Sinæn étant ici simplement de classer les problèmes selon le nombre de leurs solutions et non d'étudier la structure de l'ensemble de ces solutions (c'est-à-dire leur lieu géométrique).

2.3 *Les problèmes surabondants (masæ'il zæ'ida)*

Ces problèmes se caractérisent par le fait qu'une partie seulement des hypothèses suffit dans l'analyse à déterminer le ou les objets cherchés (en nombre fini ou infini, et éventuellement au terme d'une discussion), les hypothèses restantes étant, ou n'étant pas, satisfaites par le ou les objets ainsi déterminés. Plutôt que de tenter de préciser les relations entre ces différentes hypothèses ce qui aurait pu le conduire à préciser la notion d'indépendance des hypothèses, Ibn Sinæn divise ces problèmes en trois sous-catégories:

2.3.1 *Les problèmes vrais auxquels on a ajouté une hypothèse*
2.3.2 *Les problèmes avec discussion auxquels on a ajouté une hypothèse*
2.3.3 *Les problèmes indéterminés auxquels on a ajouté une hypothèse*.
Notons cependant que le même problème peut le plus souvent être rangé dans deux de ces trois sous-catégories.

En résumé, Ibn Sinæn classe donc les problèmes de la façon suivante:

1 les problèmes dont les hypothèses et les conditions sont suffisantes,
- 1.1 problèmes vrais,
- 1.2 problèmes impossibles,

2 les problèmes dont il est nécessaire de modifier les hypothèses,
- 2.1 problèmes indéterminés,
  - 2.1.1 problèmes indéterminés proprement dits,
  - 2.1.2 problèmes indéterminés avec discussion,
- 2.2 problèmes avec discussion,
- 2.3 problèmes surabondants,
  - 2.3.1 problèmes indéterminés auxquels on a ajouté une hypothèse,
  - 2.3.2 problèmes avec discussion auxquels on a ajouté une hypothèse,
  - 2.3.3 problèmes vrais auxquels on a ajouté une hypothèse.

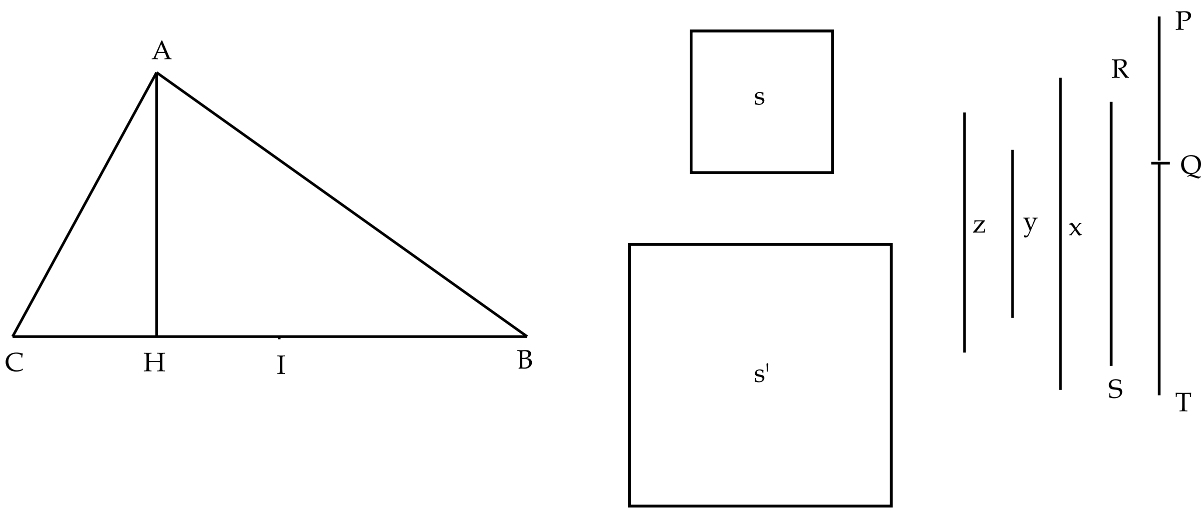
La classification adoptée ici par Ibn Sinæn ne fait donc intervenir que les critères logiques que sont le nombre et le degré d'indétermination des solutions, ainsi que, quoique de façon moins pertinente, le nombre des hypothèses et leur éventuelle indépendance. Le cadre référentiel de cette classification est donc radicalement différent de celui mis en œuvre dans les mathématiques gréco-hellénistiques: la classification hellénistique des problèmes, telle qu'elle est par exemple exposée par Pappus[10], est basée sur des critères géométriques de constructibilité et de dimension, et n'a donc de pertinence qu'en ce qui concerne les problèmes de géométrie. La classification d'Ibn Sinæn au contraire, même si les seuls exemples qui figurent dans ce traité sont des exemples géométriques, est également susceptible de s'appliquer à des problèmes d'algèbre, problèmes qui ont déjà commencé et ne vont pas cesser d'intéresser les mathématiciens.

II L'ANALYSE SELON IBN SINÆN

Après avoir classé les problèmes selon les différentes catégories que nous venons de voir, Ibn Sinæn en vient à la théorie de l'analyse proprement dite. La définition qu'il en donne est la suivante: « l'analyse du géomètre est ce qui le conduit à faire en sorte que ce qu'on lui demande dans le problème soit dans des termes donnés.[11] » L'analyse est donc, de façon explicite, la partie de la démonstration qui permet de déterminer l'objet cherché, ou plutôt de montrer que l'on peut le déterminer. Cette définition est immédiatement illustrée par des exemples montrant comment procède habituellement le géomètre pour faire l'analyse d'un problème qui lui est soumis: supposant le problème résolu et l'objet cherché trouvé, on utilise toutes les hypothèses du problème, c'est-à-dire à la fois les données et les propriétés souhaitées de l'objet cherché, et on en déduit toutes les conséquences qui en découlent, jusqu'à ce que l'on parvienne à démontrer que l'objet cherché est connu[12]. Il montre ensuite dans la synthèse, au moyen d'inférences syllogistiques, que le ou les objets que l'analyse a permis de déterminer sont bien solution du problème.

La théorie affirmée d'Ibn Sinæn touchant à l'analyse et la synthèse est que l'analyse et la synthèse doivent être inverses l'une de l'autre. Cette affirmation, qui semble de tous temps avoir été un lieu commun tant chez les logiciens que chez les mathématiciens, est quelque peu mise à mal par l'expérience des faits. Ibn Sinæn suggère une raison à cela: les géomètres de son temps abrègeraient indûment l'analyse et y sous-entendraient toutes les constructions et déterminations qui figurent habituellement au début de la synthèse, et ce d'autant que l'analyse n'est pas pour eux une méthode de démonstration (*ars demonstrandi*), mais une méthode de recherche (*ars inveniendi*) à usage interne, dans laquelle ils recherchent l'objet demandé « pour eux mêmes ». Désireux de montrer que l'on peut faire une synthèse et une analyse inverses l'une de l'autre, Ibn Sinæn illustre son propos d'un exemple très instructif: il nous donne successivement, d'un même problème vrai, trois analyses et trois synthèses. Partant d'une analyse et d'une synthèse du type de celles que font habituellement les géomètres, et du type que l'on peut trouver dans les œuvres des géomètres hellénistiques, il aboutit, après une étape intermédiaire à ce que doivent être pour lui une véritable analyse et une véritable synthèse.

EXEMPLE 9: *déterminer deux droites*[13] *orthogonales, telles que la différence de leurs carrés soit égale à une surface donnée* s, *et leur produit soit égal à une autre surface donnée* s'.



ANALYSE I

Supposons le problème résolu et soient AB et AC les droites orthogonales cherchées, H le projeté orthogonal de A sur (BC), I le symétrique de C par rapport à H;

$s = AB^2 - AC^2 = HB^2 - HC^2 = BC.BI$,

$s' = AB.AC = AH.BC$,

donc $\dfrac{BI}{AH} = \dfrac{BC.BI}{BC.AH}$ est connu;

Supposons le problème résolu et soient AB et AC les droites orthogonales cherchées, H le projeté orthogonal de A sur (BC), I le symétrique de C par rapport à H;

$s = AB^2 - AC^2 = HB^2 - HC^2 = BC.BI$,

$s' = AB.AC = AH.BC$,

donc $\dfrac{BI}{AH} = \dfrac{BC.BI}{BC.AH} = \dfrac{s}{s'}$;

ANALYSES II et III

posons $s = PQ^2$, $s' = RS^2$, et soit x la troisième proportionnelle de PQ et RS,

d'où $\dfrac{BI}{AH} = \dfrac{PQ^2}{RS^2} = \dfrac{PQ}{x}$).

Soit y la troisième proportionnelle de PQ et de x (de sorte que $\dfrac{PQ}{y} = \dfrac{PQ^2}{x^2}$),

puisque $AH^2 = BH.CH$,

$\dfrac{BI^2}{BH.CH} = \dfrac{BI^2}{AH^2}$ est connu,

puisque $AH^2 = BH.CH$,

$\dfrac{BI^2}{BH.CH} = \dfrac{BI^2}{AH^2} = \dfrac{PQ^2}{x^2} = \dfrac{PQ}{y}$.

Soit T tel que $QT = 4y$ ($T \in$ demi-droite opposée à $[QP]$)), $\dfrac{4BH.CH}{BI^2} = \dfrac{QT}{PQ}$,

d'où, par composition des rapports,

$\dfrac{BC^2}{BI^2} = \dfrac{BI^2 + 4BH.CH}{BI^2}$ est connu,

d'où, par composition des rapports,

$\dfrac{BC^2}{BI^2} = \dfrac{BI^2 + 4BH.CH}{BI^2} = \dfrac{PT}{PQ}$.

Soit z la moyenne proportionnelle de PT et de PQ (de sorte que $\dfrac{PT}{PQ} = \dfrac{z^2}{PQ^2}$),

et $\dfrac{BC}{BI}$ est connu ainsi que $BC.BI$,

alors $\dfrac{BC}{BI} = \dfrac{z}{PQ}$ et $BC.BI = PQ^2$.

$\dfrac{PQ^2}{BC^2} = \dfrac{BC.BI}{BC^2} = \dfrac{BI}{BC} = \dfrac{PQ}{z}$.

Soit t la moyenne proportionnelle de PQ et de z: $\dfrac{PQ^2}{BC^2} = \dfrac{PQ}{z} = \dfrac{PQ^2}{t^2}$,

par conséquent BC est connue,

d'où $BC = t$.

et BI est connue;

Puisque $BC.BI = s$, BI est connue

(et $BI < BC$, voir synthèse I)

H milieu de $[CI]$ est donc connu.

H milieu de $[CI]$ est donc connu.

Puisque $AH^2 = BH.CH$, AH est connue,

AB et AC sont connues.

Puisque $AH^2 = BH.CH$, AH est connue,

AB et AC sont connues.

SYNTHESES I et II:

-*constructions*[14]:

(8) posons $s = PQ^2$, $s' = RS^2$, soit x la troisième proportionnelle de PQ et RS (de sorte que $\frac{PQ^2}{RS^2} = \frac{PQ}{x}$), soit y la troisième proportionnelle de PQ et de x (de sorte que $\frac{PQ}{y} = \frac{PQ^2}{x^2}$), soit T tel que $QT = 4y$ ($T \in$ demi-droite opposée à $[QP)$), soit z la moyenne proportionnelle de PT et de PQ (de sorte que $\frac{PT}{PQ} = \frac{z^2}{PQ^2}$), soit BC la moyenne proportionnelle de PQ et de z (de sorte que $\frac{PQ^2}{BC^2} = \frac{PQ}{z}$)

soit I tel que $BC.BI = s$[15] ($I \in [BC]$, en effet: $Q \in [PT]$ donc $PQ < BC < z < PT$ soit $s < BC^2$, d'où $BI < BC$);

soient H le milieu de $[CI]$, A le point tel que $(AH) \perp (BC)$ et que $AH^2 = BH.CH$ (A est le point d'intersection du cercle de diamètre $[BC]$ et de la perpendiculaire à (BC) issue de H) ;

SYNTHESE III:

constructions:

Les droites PQ, RS, x, y, t, BC, BI étant tracées comme elles l'ont été dans l'analyse,

soient H le milieu de $[CI]$, A le point tel que $(AH) \perp (BC)$ et que $AH^2 = BH.CH$ (A est le point d'intersection du cercle de diamètre $[BC]$ et de la perpendiculaire à (BC) issue de H) ;

à partir de là les trois synthèses sont identiques:

puisque $AH^2 = BH.CH$ et $(AH) \perp (BC)$, le triangle ABC est rectangle en A et AB et AC sont les droites cherchées;

démonstration:

puisque $BC.BI = s = PQ^2$, $\dfrac{BI}{BC} = \dfrac{BC.BI}{BC^2} = \dfrac{PQ^2}{BC^2} = \dfrac{PQ}{z}$, d'où $\dfrac{BC^2}{BI^2} = \dfrac{z^2}{PQ^2} = \dfrac{PT}{PQ}$;

puisque $BC^2 = BI^2 + 4BH.CH$, $\dfrac{4BH.CH}{BI^2} = \dfrac{BC^2 - BI^2}{BI^2} = \dfrac{PT - PQ}{PQ} = \dfrac{QT}{PQ}$

et $\dfrac{AH^2}{BI^2} = \dfrac{BH.CH}{BI^2} = \dfrac{y}{PQ}$, d'où $\dfrac{AH}{BI} = \dfrac{x}{PQ}$;

$\dfrac{PQ^2}{BC.AH} = \dfrac{BC.BI}{BC.AH} = \dfrac{BI}{AH} = \dfrac{PQ}{x} = \dfrac{PQ^2}{RS^2}$, d'où $AB.AC = BC.AH = RS^2 = s'$,

et $AB^2 - AC^2 = BH^2 - CH^2 = \mathrm{BC}.BI = s$.

Au terme de ces trois versions successives de la démonstration d'un même problème, l'objectif d'Ibn Sinæn a été pratiquement atteint: l'analyse et la synthèse I, qui sont du type des analyses et synthèses classiques, celles que l'on rencontre tant dans les œuvres des géomètres hellénistiques que dans celles des contemporains d'Ibn Sinæn, ne sont pas inverses l'une de l'autre, le fait le plus flagrant étant que les constructions qui figurent au début de la synthèse ne se rencontrent pas dans l'analyse. Toutefois si nous voulons comprendre le procédé heuristique qui y a conduit, nous devons imaginer que toutes ces constructions étaient, comme le dit explicitement Ibn Sinæn, sous-entendues dans l'analyse I: du fait que l'objectif de la démonstration n'est pas d'établir des équivalences entre hypothèses et conclusion, mais seulement de montrer dans l'analyse que l'objet cherché est connu, et dans la synthèse que l'objet que l'analyse a permis de déterminer est bien solution du problème, il a pu sembler plus pratique dans une rédaction définitive de regrouper toutes ces constructions au début de la synthèse. Ces constructions, énoncées sans justification au début de la synthèse I, sont ensuite intégrées aux analyses II et III, dans lesquelles on ne se contente plus de démontrer que les objets cherchés sont connus mais où on les y détermine effectivement: toutes les séquences de l'analyse I du type "*x* est connu" étant remplacées dans les analyses II et III par des séquences du type "*x* est égal à *a*". Dans la deuxième version de la démonstration de ce problème, analyse et synthèse sont pratiquement inverses l'une de l'autre, mais la démonstration est redondante, les constructions des objets cherchés figurant à la fois dans l'analyse et dans la synthèse. La différence ente la deuxième et la troisième version de ce problème est importante: rompant avec l'habitude des géomètres, Ibn Sinæn ne fait plus figurer les constructions au début de la synthèse.

Au cours des trois versions successives de la démonstration de ce problème, les poids respectifs de l'analyse et de la synthèse ont été inversés: dans la première version de la démonstration de ce problème supprimer l'analyse ne nuirait pas à la rigueur de la preuve mais rendrait seulement plus arbitraires encore les constructions figurant au début de la synthèse; dans la troisième version par contre l'analyse ne saurait en aucun cas être omise alors que la synthèse pourrait sembler redondante à un lecteur peu rigoureux dans la mesure où elle ne fait qu'inverser des raisonnements qui figurent dans l'analyse (dans le cas des analyses II et III), et ce d'autant qu'Ibn Sinæn ne donne pas d'exemple de problème dans lequel l'objet que l'analyse aurait permis de déterminer ne serait pas solution du problème, c'est-à-dire ne donne pas d'exemple de conditions nécessaires qui ne seraient pas suffisantes[16] (Ibn Sinæn semble cependant conscient du danger puisqu'il déconseille aux débutants l'usage de sa méthode). Cependant l'extrême souci de rigueur d'Ibn Sinæn, qui le conduit parfois à d'inutiles répétitions, et son désir d'établir des équivalences entre hypothèses et conclusion fait que pour lui la synthèse n'est absolument pas superflue, et que c'est encore à elle qu'est dévolu le rôle de preuve, car « si tu te contentais de l'analyse, tu ne démontrerais rien, tu ne ferais que poser une hypothèse et examiner ce qui en découle nécessairement .... la synthèse ... aboutit à ce que qui t'était demandé, par la voie de la démonstration, au moyen de ce qui est irréfutable[17] » même si découlant directement de l'analyse et de ce fait ne posant pas de problème particulier la synthèse peut être laissée au lecteur. Cette attitude vis-à-vis de la synthèse se retrouve non seulement chez Ibn Sinæn[18] mais chez nombres de mathématiciens postérieurs qui négligeront délibérément d'indiquer la synthèse d'un problème.

III CONCLUSION

Dans ce traité, l'intérêt d'Ibn Sinæn porte sur l'aspect logique de la théorie de la démonstration et ce à deux niveaux:

1 Le cadre référentiel qui sert de base à la classification des problèmes d'Ibn Sinæn n'est plus, comme nous l'avons déjà constaté, le cadre exclusivement géométrique des mathématiques hellénistiques, fondé sur des critères de constructibilité et de dimension, mais un cadre logique ne faisant plus intervenir que le nombre et le degré d'indétermination des solutions, ainsi que le nombre des hypothèses (sans toutefois que la notion d'indépendance de celles-ci soit clairement explicitée). La classification d'Ibn Sinæn ne se substitue toutefois pas à la classification hellénistique, laquelle garde, et gardera au moins jusqu'au dix-septième siècle,

sa pertinence en matière de problèmes de géométrie, et tout particulièrement de problèmes de lieux (que Fermat classe encore en lieux plans, lieux solides, et lieux de lignes), mais se développe à côté de celle-ci et sans rapport avec elle, dans un cadre radicalement différent. Cette nouvelle classification des problèmes est par contre mieux adaptée à l'algèbre dans la mesure où elle prend en compte les problèmes surabondants (ayant plus d'équations que d'inconnues), les problèmes indéterminés (analyse diophantienne), les problèmes impossibles, et les problèmes avec discussion qui sont des types de problèmes qui se rencontrent plus fréquemment en algèbre qu'en géométrie; en particulier le fait de donner un véritable statut aux problèmes avec discussion qui a conduit Ibn Sinæn, non seulement à remodeler l'ordre dans lequel se fait la démonstration d'un problème, mais à énoncer, pour la première fois les règles d'une véritable discussion, n'est sans doute pas sans lien avec le rôle croissant que joue, chez les algébristes, ce type de problème, puisque, une bonne partie des équations du second degré qu'ils résolvent à cette époque entre dans cette catégorie de problèmes. La classification d'Ibn Sinæn, sera reprise et utilisée par les algébristes, qui sont, sur ce plan, les héritiers d'Ibn Sinæn.

On en retrouve un écho, deux siècles plus tard, chez al-Samaw'al[19], qui classe maintenant les problèmes en:

a) problèmes nécessaires, eux mêmes subdivisés en:

- problèmes tels que tout nombre ou grandeur soit solution,
- problèmes tels que tout nombre ou grandeur ne soit pas solution, mais ayant néanmoins une infinité de solutions,
- problèmes ayant une seule solution,
- problèmes ayant plusieurs solutions en nombre fini,
- problèmes nécessitant une condition,
- problèmes nécessitant plusieurs conditions;

b) problèmes possibles, c'est-à-dire dont on ne sait démontrer, ni qu'ils ont des solutions, ni qu'ils n'en ont pas (c'est-à-dire problèmes indécidables);

c) problèmes impossibles, n'ayant pas de solution.

Notons cependant que si le vocabulaire est, à peu de choses près, le même que celui utilisé par Ibn Sinæn, le sens en est différent: les problèmes nécessaires sont pour al-Samaw'al ceux qui ont des solutions (en nombre fini ou non, avec ou sans condition), c'est-à-dire ceux qui sont solubles, ou s'il s'agit de problèmes d'algèbre, calculables, et les problèmes possibles sont en fait les problèmes indécidables.

Ibn al-Haytham, dans son traité sur *L'analyse et la synthèse*[20] postérieur de quelques décennies à celui d'Ibn Sinæn, reprend également en partie sa classification des problèmes (ainsi qu'une partie des exemples cités par celui-ci). Il classe en effet les problèmes en:

- problèmes avec discussion,
- problèmes sans discussion, eux mêmes subdivisés en:
- problèmes indéterminés (ayant plusieurs solutions, en nombre fini ou non),
- problèmes non indéterminés (ayant une seule solution).

Notons que ne figure plus chez Ibn al-Haytham la notion de problème dont on doit modifier les hypothèses et que sa classification, qu'il applique à tous les problèmes du quadrivium (y compris la musique) ne comporte ni problèmes surabondants, ni problèmes impossibles, ni problèmes indéterminés avec discussion.

2. Le souci d'Ibn Sinæn, souci de logicien, de développer une théorie de la démonstration dans laquelle analyse et synthèse soient inverses l'une de l'autre a pour effet, comme nous l'avons déjà signalé, de donner plus d'importance au rôle de l'analyse dans la démonstration: comme les exemples qu'il en donne le prouvent, c'est l'analyse qui permet de déterminer si un problème a ou n'a pas de solution; c'est également par l'analyse que, dans le cas d'un problème avec discussion, on détermine la ou les conditions nécessaires à l'existence de solutions; c'est enfin par l'analyse que l'on détermine cette ou ces solutions. Le rôle de la synthèse n'est plus alors, outre de fait qu'y figure la discussion dans le cas d'un problème avec discussion, de vérifier que toutes les implications de l'analyse qui doivent être inversées dans la synthèse sont bien inversibles.

Si la nouvelle conception de l'analyse, exposée par Ibn Sinæn dans la dernière partie de son traité, semble, avoir eu peu d'impact sur les géomètres qui continuent et continueront, et ce jusqu'au dix-septième siècle, a faire des démonstrations selon le schéma classique dans lequel on se contente de démontrer dans l'analyse que l'objet cherché est connu ou donné sans tenter de l'y déterminer effectivement, elle va par contre devenir la pratique effective des algébristes, au point que certains d'entre eux, comme al-Samaw'al identifieront explicitement algèbre et analyse[21]. En effet l'algèbre va devenir, pour les successeurs d'al-Khwærizmî, essentiellement la science de la résolution des équations; pour ce faire, supposant implicitement l'existence du nombre ou de la grandeur inconnus, et « calculant sur les inconnues comme l'arithméticien opère sur les connues[22] », on détermine cette ou ces inconnues[23]; on retrouve bien là la nouvelle analyse telle qu'elle nous a été exposée par Ibn Sinæn, dans la mesure où, dans ce type d'analyse , on ne se contente pas de montrer que la grandeur cherchée est connue, mais où on la détermine effectivement, en intégrant à l'analyse toutes les déterminations (constructions ou calculs) qui, dans la conception antérieure de la démonstration, figuraient au début de la synthèse; si le problème est un problème ne donnant pas lieu à une discussion, le rôle de la synthèse n'est plus alors que de s'assurer que le passage d'une équation à l'autre se fait par équivalences, il peut même se réduire à une simple « vérification[24] » (éventuellement numérique) du fait que la ou les grandeurs que l'analyse a permis de déterminer (calculer) sont bien solution du problème, d'où la tentation de ne plus faire la synthèse et d'identifier algèbre et analyse. Certes, le traité d'Ibn Sinæn n'a pas pour objet l'ensemble des mathématiques, mais uniquement la géométrie; cependant, si c'est à la géométrie qu'Ibn Sinæn s'adresse au premier chef, l'algèbre, l'analyse diophantienne, sont toujours sous-jacentes, et l'unification des mathématiques qu'il entend opérer porte sur les procédés d'analyse et de synthèse, et sur les raisonnements déployés, indépendamment pour ainsi dire des régions de la géométrie dans lesquelles ils s'appliquent.

Notons pour conclure que l'intérêt pour l'analyse qui se manifeste à Bagdad aux dixième et onzième siècle, et en Europe aux seizième et dix-septième siècle, se situe dans des contextes mathématiques assez semblables: une relecture, à la lumière de récentes découvertes en algèbre, des *Données* d'Euclide, des ouvrages d'Apollonius (traduits en arabe aux neuvième et dixième siècles, et en latin au seizième siècle), des œuvres de Diophante (dont la première traduction en arabe due à Qus†æ Ibn Lºqæ a été achevée à Bagdad, au plus tard en 862[25], et dont l'*editio princeps*, de Bachet de Méziriac date de 1621), ont conduit les mathématiciens de ces différentes époques à s'intéresser aux mêmes problèmes[26]. Il n'est également pas impossible d'ailleurs que les œuvres d'Ibn Sinæn et de ses successeurs aient été, en partie tout au moins, transmises, de quelque façon que nous ignorons encore, aux mathématiciens européens des seizième et dix-septième siècles, Viète en premier lieu[27]. L'étude de ce chapitre de l'histoire des mathématiques reste à faire si l'on veut étayer ou infirmer ce qui ne peut, dans l'état actuel de nos connaissances, qu'être une conjecture.

---

[1] Cet article reprend pour l'essentiel un article paru en anglais dans *Arabic Sciences and Philosophy*, Cambridge University Press, vol. 1 (1991) n° 2, p. 211- 231.

[2] Cet article reprend pour l'essentiel un article paru en anglais dans *Arabic Sciences and Philosophy*, Cambridge University Press, vol. 1 (1991) n° 2, p. 211- 231.

[3] Ibræhîm Ibn Sinæn Ibn Thæbit Ibn Qurra (296/909-335/946) est l'héritier d'une dynastie de savants: il est le fils de Sinæn médecin et encyclopédiste, ami et compagnon du calife al-Ra∂î (934-940), et le petit fils de Thæbit Ibn Qurra, traducteur et mathématicien de génie.
Sur les œuvres de Thæbit et d'Ibn Sinæn voir:
Thæbit Ibn Qurra, *Œuvres d'astronomie*, texte établi et traduit par R. Morelon, Les Belles Lettres, Paris 1987,
R. Rashed, *Les mathématiques infinitésimales du IX^e^ au XI^e^ siècle*, Vol. I *Fondateurs et commentateurs*, Al-Furqan Islamic Heritage Foundation, Londres 1996,
R. Rashed & H. Bellosta, *Ibræhîm Ibn Sinæn: Logique et géométrie au X^e^ siècle*, Brill, Leiden 2000.

[4] Aristote, *Ethique à Nicomaque*, III, 5, 1112b, *Les Premiers analytiques*, 43b, 46b, 51b11, Platon, *Ménon*, 86e-87c, *La République*, 546bc.

[5] Avec le texte de Pappus, et pour la première fois, nous sommes en présence, non plus de la réflexion d'un philosophe sur ce sujet, mais de celle d'un mathématicien, directement issue de sa pratique mathématique. Ce texte est extrêmement connu, et est suffisamment riche pour avoir donné lieu à de nombreux commentaires; il n'est toutefois pas dépourvu d'ambiguïtés et d'obscurités, et soulève souvent plus de problèmes qu'il n'en résout.

Pappus d'Alexandrie, *La Collection mathématique*, 2nd édition, traduction P. Ver Eecke, 2 volumes, Paris 1982, vol. II, p. 477-478.

[6] Proclus de Lycie, *Les Commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide*, première édition, traduction P. Ver Eecke, Paris 1948, p. 5, 15, 37, 63.

[7] La géométrie grecque et hellénistique, celle du moins des *Éléments*, est en effet essentiellement synthétique; on trouve néanmoins dans quelques textes grecs des exemples d'analyses: citons pour mémoire *La Section de rapport* d'Apollonius, ainsi que les autres textes, en majeure partie perdus, cités par Pappus dans l'introduction au Livre VII de *La Collection mathématique* et formant ce que l'on a coutume de nommer *La Collection analytique*, les propositions 54 à 58 du Livre III de *La Collection mathématique* (inscription dans une sphère des cinq solides platoniciens), ainsi que les propositions 4, 7, 8, 9, 10, 12, 31, 33, 37, 40, 44 du Livre IV du même ouvrage, à quoi l'on peut ajouter les propositions 1, 3, 4, 5, 6, et 7 du livre II du traité *De la sphère et du cylindre* d'Archimède.

Cette rareté des textes théoriques concernant l'analyse, jointe au peu d'exemples d'analyses, a donné naissance aux seizième et dix-septième siècles, à un certain nombre de tentatives visant à percer le « mystère » de l'analyse grecque et à la restituer dans toute sa splendeur (voir ce qu'en dit J. Itard, *Essais d'histoire des mathématiques*, p. 277: « Chacun recherchait alors l'Analyse des Anciens, persuadé qu'on était, depuis au moins Nonnius, qu'ils nous avaient caché leur méthode de recherche sous l'élégance sévère de leur exposition synthétique. Viète, le premier avait cru reconstituer cette Analyse antique. Il avait en réalité fondé l'Analyse moderne. »)

J. Itard, *Essais d'histoire des mathématiques*, Blanchard, Paris 1984.

C'est la même idée que l'on retrouve chez Descartes: « car nous remarquons que les anciens géomètres se sont servis d'une analyse, qu'ils étendaient à la résolution de tous les problèmes, mais dont ils ont jalousement privé la postérité… Mais je croirais volontiers que par une malice mauvaise ces auteurs l'ont ensuite cachée eux-mêmes. » Règles pour la direction de l'esprit, Règle IV, Descartes, *Œuvres et lettres*, Gallimard, Paris 1953, pp.47-50.

[8] M. Chasles, *Les trois livres de porismes d'Euclide*, Paris 1860, p. 32-37.

[9] Proclus, *Les Commentaires*, second prologue, p. 71.

[10] Pappus, *La Collection mathématique*, livre IV, vol. I, p. 206-207. La classification hellénistique des problèmes, est la suivante:

- les problèmes plans, solubles au moyen de cercles ou de droites,
- les problèmes solides solubles à l'aide de sections coniques,
- les problèmes grammiques ou linéaires solubles au moyen d'autres courbes.

[11] R. Rashed & H. Bellosta, *Ibræhîm Ibn Sinæn, Logique et géométrie au Xe siècle*, p. 114.

[12] Ibn Sinæn adopte la définition suivante: « le connu est ce à quoi il peut exister un égal » laquelle résume les définitions 1 et 2 des *Données* d'Euclide:

Définition 1: des espaces, des lignes et des angles auxquels nous pouvons trouver des grandeurs égales sont dits donnés de grandeur;

Définition 2: une raison est dite donnée de grandeur quand nous pouvons lui en trouver une qui soit la même.

R. Rashed & H. Bellosta, *Ibræhîm Ibn Sinæn, Logique et géométrie au Xe siècle*, p. 208.

Les œuvres d'Euclide en grec, latin, et français, traduites par F. Peyrard, 3 volumes, Paris 1814-1818, réédition Blanchard, Paris 1993.

[13] C'est-à-dire deux segments de droites.

[14] Comme toutes les synthèses de type classique, cette synthèse se compose de deux parties, une partie construction dans laquelle on construit l'objet dont l'analyse a permis d'affirmer qu'il était connu, une partie démonstration dans laquelle on démontre que l'objet ainsi construit est bien solution du problème. Toutes les constructions qui vont suivre reposent sur une utilisation magistrale et répétée de la définition 9 du Livre V des *Éléments* (si A/B B/C, alors $A^2/B^2 = A/C$) utilisée de deux façons différentes:

- si l'on connaît un rapport du type A/C que l'on veut écrire sous forme du rapport de deux surfaces, en d'autres termes si l'on veut trouver la racine carrée de ce rapport, on prend B, moyenne proportionnelle de A et de C, alors $A/C = A^2/B^2$, A/B est alors la racine carrée de A/C (voir *Éléments* VI 13 pour la construction de la moyenne proportionnelle);
- si l'on connaît un rapport du type A^2/B^2, et si l'on veut l'écrire sous forme du rapport de deux longueurs, en d'autres termes si l'on veut trouver le carré de A/B, on prend C troisième proportionnelle de A et de B, alors A/C

= A^2/B^2 et A/C est alors le carré de A/B (voir *Éléments* VI 11 pour la construction de la troisième proportionnelle).

[15] Puisque $BC.BI = s = PQ^2$, BI est la troisième proportionnelle à BC et à PQ.

[1616] Pour un exemple de problème dans lequel on ne peur montrer que l'objet que la synthèse a permis de déterminer est solution du problème, voir R. Rashed & H. Bellosta, *Ibrœhîm Ibn Sinœn, Logique et géométrie au X^e^ siècle*, p. 51-54.

[17] R. Rashed & H. Bellosta, *Ibrœhîm Ibn Sinœn, Logique et géométrie au Xe siècle*, p. 186.

[18] Voir l'*Anthologie de problèmes* d'Ibn Sinæn dans laquelle il ne donne de pratiquement tous les problèmes que l'analyse. R. Rashed & H. Bellosta, *Ibrœhîm Ibn Sinœn, Logique et géométrie au Xe siècle*, p. 435-749.

[19] As-Samaw'al, *al-Bœhir en algèbre d'as-Samaw'al*, édition, notes et introduction par S. Ahmad & R. Rashed, Damas 1972, p. 227-251 (texte arabe).

[20] R. Rashed, *La philosophie des mathématiques d'Ibn al-Haytham*, *I L'analyse et la synthèse*, MIDEO 20, Louvain 1991, p. 31-231.

[21] As-Samaw'al, *al-Bœhir en algèbre d'as-Samaw'al*, p. 74.

[22] As-Samaw'al, *al-Bœhir en algèbre d'as-Samaw'al*,, texte français p. 10.

[23] Pour al-Karafiî par exemple, « la détermination des inconnues à partir des prémisses est la tâche propre de l'algèbre », cité par R. Rashed dans *Entre arithmétique et algèbre, recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, Les Belles Lettres, Paris 1984, p.38.

[24] G. G. Granger, *La vérification*, O. Jacob, Paris 1992, Vérifier en mathématiques, chap. II, pp. 89-173.

[25] Diophante, *Les Arithmétiques*, traduction R. Rashed, 4 volumes, Les Belles Lettres, Paris 1984, vol. III, p. XX.

[26] Les ressemblances ne s'arrêtent d'ailleurs pas là, on pourrait également citer l'importance que prennent, à ces deux époques fécondes, les correspondances entre mathématiciens. Sur l'importance de la correspondance scientifique au dixième siècle, ainsi que sur les querelles entre savants, voir les articles d'A. Anbouba dans le *Journal for the History of Arabic science*, articles *Un traité d'al-Khazin*, (1979, p.137, note 11) *et La construction de l'heptagone régulier*, (1977, pp.73-105).

[27] C'est l'hypothèse que formule R. Rashed, après avoir comparé les méthodes de résolution d'une même équation par Viète et Ωaraf al-Dîn al-™ºsî, mathématicien du douzième siècle, dans *Entre arithmétique et algèbre*, p. 193.