GEOMETRIE DANS LA TRADITION ARABE -1

Trop longtemps éclipsés par la nouveauté radicale de l'algèbre, les apports propres de la géométrie arabe ont longtemps été sous-évalués ; la tendance était en effet, jusqu'à ces dernières années, de n'y voir guère qu'un conservatoire de la géométrie grecque et ce d'autant que seuls quelques textes, et pas nécessairement les plus représentatifs, avaient été édités et étudiés. Les travaux menés ces trente dernières années, essentiellement en France, par Roshdi Rashed et ses élèves, ont radicalement modifié cette vision réductrice, et les nombreux textes maintenant édités — tâche qui est loin d'être achevée — ont bouleversé et renouvelé la vision que nous en avions.

La géométrie arabe est indubitablement fille de la géométrie grecque. Les œuvres des trois plus grands géomètres de l'Antiquité gréco-hellénistique, Euclide (III^e siècle BC), dont les *Éléments* sont le fondement de la géométrie, Archimède (mort en 212 BC) et Apollonius (né vers 262 BC), à quoi l'on doit ajouter Ménélaüs (vers 100 AD), vont être à la base des recherches des mathématiciens arabes ; ceux-ci vont faire une synthèse originale des travaux de leurs prédécesseurs grecs, mais également développer quelques chapitres de géométrie non hellénistique.

1. LES COMMENTAIRES AUX *ÉLEMENTS* D'EUCLIDE ET LES TENTATIVES DE DEMONSTRATION DU POSTULAT DES PARALLELES

Les premières traductions des *Éléments* d'Euclide, dues à al-Hajjaj ibn Yusuf ibn Matar, datent de la fin du VIII^e siècle - début du IX^e siècle, et ont été faites sous les règnes des califes Harun al-Rashid (786-809) et al-Ma'mun (813-833) ; à l'exception de quelques fragments, elles ne nous sont pas parvenues. IsÌaq ibn Hunayn est l'auteur d'une troisième traduction, révisée par le grand mathématicien Thæbit ibn Qurra (836-901). Abu 'Uthman al-Dimashqî aurait également traduit au début du X^e siècle plusieurs livres des *Éléments* (rien ne nous en a été transmis). On trouve également en arabe des rédactions (*tahrir*) des *Éléments*, faites à partir des traductions précédentes. On doit en particulier au mathématicien al-Qºhî (deuxième moitié du X^e siècle) une réécriture des deux premiers livres. La plus fameuse de ces rédactions est celle due vraisemblablement à un élève de Nasir al-Din al-Tusi (1201-1274), datée de 1248 et faite à partir des versions d'al-Hajjaj et de Thæbit. Si l'on en croit la multiplicité des copies qui en ont été faites, il semble que cette édition à visée didactique se soit rapidement imposée comme l'édition de référence.

Les *Éléments* ont également donné lieu en arabe à un grand nombre de commentaires, le plus souvent dus à de grands mathématiciens : Thæbit ibn Qurra, al-Khæzin, al-Qºhî, Ibn al-Haytham, al-Khayyæm…. Les parties de l'œuvre d'Euclide qui ont le plus inspiré les commentateurs sont les principes du livre I (définitions, axiomes, postulats — essentiellement le cinquième postulat ou postulat des parallèles), le livre V (sur la théorie des proportions) et le livre X (sur les grandeurs irrationnelles).

Le postulat des parallèles

Le cinquième postulat, ou postulat des parallèles, dont l'énoncé présente la particularité d'avoir la forme d'un théorème[1] et dont en outre la réciproque est un théorème des *Éléments* (proposition I, 28[2]) a, dès le III^e^ siècle BC, troublé les commentateurs. Les tentatives de démonstration de ce postulat ont joué un rôle particulièrement important dans l'histoire de la géométrie et la littérature sur le sujet est immense[3]. Jusqu'au XIX^e^ siècle, toutes les tentatives connues de démonstration de ce postulat reviennent bien évidemment à le remplacer, explicitement ou non, par un (ou plusieurs) postulat plus ou moins équivalent, sans remettre en question un certain nombre de propriétés considérées comme allant de soi (infinité et continuité de la droite, axiome d'Archimède, axiome de Pasch, homogénéité de l'espace…). Ces tentatives sont souvent couplées avec la tentative de définir le parallélisme des droites par l'équidistance.

Les tentatives de démonstrations du postulat 5 sont nombreuses dans le monde arabe. La première est celle de 'Abbas al-Jawhærî (IX^e^ siècle), dans un texte cité par NaÒîr al-Dîn al-™ºsî[4] : dans sa démonstration al-Jawhærî admet implicitement d'une part que, si deux droites sont parallèles, toute sécante à l'une est sécante à l'autre et, d'autre part, que si l'égalité des angles alternes internes est vraie pour une transversale, elle est vraie pour toutes les transversales (al-™ºsî relève cette dernière pétition de principe).

Al-Nayrizî (fin X^e^ siècle), dans ses commentaires aux *Éléments*, largement diffusés tant dans le monde arabe que dans le monde latin, rapporte une démonstration attribuée à un certain Aganis (parfois identifié avec Géminus) : celui-ci postule l'existence de droites équidistantes (toutes les perpendiculaires abaissées de l'une sur l'autre, ou de l'autre sur l'une, sont égales) ainsi que la possibilité de mener d'un point une perpendiculaire à une droite donnée (qui résulte de *Éléments* I 12), et l'unicité de cette perpendiculaire (qui résulte de *Éléments* I 16). Aganis définit alors des droites parallèles comme étant des droites équidistantes, il en déduit *Éléments* I 29[5] (en utilisant les axiomes de congruence). En toute logique il ne serait alors pas utile de démontrer le postulat 5 puisque *Éléments* I 29 est équivalent à un corollaire de ce postulat. Aganis va cependant en donner une démonstration directe en montrant l'existence du point d'intersection de deux droites qui, coupées par une sécante, font des angles intérieurs dont la somme est inférieure à deux droits (sa démonstration utilise l'axiome d'Archimède et l'axiome de Pasch : *si une droite coupe un côté d'un triangle, elle coupe un deuxième côté*).

---

[1] Postulat 5 : « et que, si une droite tombant sur deux droites fait des angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où les angles sont plus petits que deux droits » (trad. B. Vitrac).
Euclide, *Les Éléments*, traduction et commentaires B. Vitrac, 4 vol., PUF, Paris, 1990-2001.

[2] Proposition I 28 : « si une droite tombant sur deux droites fait l'angle extérieur égal à l'angle intérieur et opposé du même côté, ou les angles intérieurs et du même côté égaux à deux droits, les droites seront parallèles l'une à l'autre » (trad. B. Vitrac). La démonstration de cette proposition ne fait pas intervenir le postulat 5.

[3] R. Bonola, *Non-Euclidean geometry*, New York, 1955.
K. Jaouiche, *La théorie des parallèles en pays d'Islam*, Vrin, Paris, 1986.
C. Houzel, « Histoire de la théorie des parallèles », dans *Mathématiques et philosophie de l'Antiquité à l'Âge classique*, Paris, 1991, p. 163-179.

[4] NaÒîr al-Dîn al-™ºsî, *Al-Risæla al-Shæfiya*, Rasæ'il al-™ºsî, éditions d'Hyderabad, vol. II, p. 2-40.

[5] Proposition I, 29 : « une ligne droite tombant sur des droites parallèles fait des angles alternes égaux entre eux, et aussi l'angle extérieur égal à l'angle intérieur et opposé, et les angles intérieurs et du même côté égaux à deux droits » (trad. B. Vitrac).

À la fin du IX^e siècle, Thæbit ibn Qurra (mort en 901) propose deux démonstrations différentes du postulat 5[6]. Dans sa première tentative, Thæbit part du postulat explicitement énoncé selon lequel « deux droites qui se rapprochent d'un côté s'éloignent de l'autre » ; il montre alors que si deux droites coupées par une sécante font des angles alternes internes égaux, les deux droites ne s'éloignent ni ne se rapprochent (droites équidistantes) et réciproquement. Il en déduit ensuite le postulat 5 en montrant l'existence du point d'intersection de deux droites qui, coupées par une sécante, font des angles intérieurs dont la somme est inférieure à deux droits (sa démonstration, qui suppose, d'une part que par tout point on peut mener une droite qui ne se rapproche ni ne s éloigne d'une droite donnée et, d'autre part que, si une droite située entre deux droites qui ne s'éloignent ni ne se rapprochent l'une de l'autre s'éloigne de l'une, alors elle se rapproche de l'autre, fait également intervenir l'axiome de Pasch et l'axiome d'Archimède explicitement énoncé — sous la forme de la duplication).

La deuxième démonstration de Thæbit repose sur le postulat que, si une extrémité d'un segment de direction fixe décrit une droite, l'autre extrémité de ce segment décrit également une droite (ou en d'autres termes que l'image d'une droite par une translation est une droite). Thæbit montre tout d'abord que, si un quadrilatère a deux angles égaux à sa base et deux côtés latéraux égaux (quadrilatère dit de Saccheri), alors les deux angles restants sont égaux (et inversement que, si les angles sur deux bases opposées sont deux à deux égaux, alors les côtés adjacents à ces bases sont égaux). Il en déduit d'abord que deux droites perpendiculaires à une même troisième sont équidistantes (sa démonstration fait intervenir *Éléments* I 17[7]), puis en déduit que, si deux droites équidistantes sont coupées par une sécante, les angles alternes internes sont égaux (intervient dans ces démonstrations la possibilité de mener d'un point extérieur à une droite une perpendiculaire à cette droite — *Éléments* I 12 — et l'unicité de cette perpendiculaire, déduite de *Éléments* I 16, ainsi que l'axiome de Pasch). Il en déduit alors, comme dans la première démonstration, le postulat 5 en montrant l'existence du point d'intersection de deux droites qui, coupées par une sécante, font des angles intérieurs dont la somme est inférieure à deux droits.

Le grand mathématicien Ibn al-Haytham (mort après 1040) a également consacré deux textes au postulat 5[8]. Dans le premier texte, il justifie d'abord, grâce au mouvement, l'existence de droites équidistantes, la notion de droites équidistantes remplaçant alors, comme dans la deuxième démonstration de Thæbit, celle de droites parallèles. Il montre ensuite par l'absurde que, si un quadrilatère a 3 angles droits, deux côtés opposés sont égaux (intervient dans sa démonstration, outre le mouvement, l'unicité de la droite passant par deux points, *i. e.* le fait que deux lignes droites n'entourent pas une surface), puis en déduit que le quatrième angle est également droit. Il démontre alors le postulat 5 en montrant l'existence du point d'intersection de deux droites qui, coupées par une sécante, font des angles intérieurs dont la somme est inférieure à deux droits, d'abord dans le cas où les deux angles intérieurs sont aigus, puis dans le cas où l'un

---

[6] R. Rashed et C. Houzel, « Thæbit ibn Qurra et la théorie des parallèles » *Arabic Sciences and Philosophy*, vol. 15, n° 1, mars 2005, p. 9-56.

[7] *Éléments* I, 17 : dans tout triangle, deux angles pris ensemble de quelque façon que ce soit, sont plus petits que deux droits (trad. B. Vitrac).

[8] Ibn al-Haytham, *Commentaire aux postulats du Livre d'Euclide "Les Éléments"*, éd. Barbara Hooper Sude, d'après les manuscrits Bodleian I, 908/1 (Huttington 237), Alger 1446/1, Feyzallah 1359/2.
Ibn al-Haytham, *On the resolution of doubts in Euclid's Elements and interpretation of its special meanings*, Sezgin, (fac-similé du manuscrit A. Y. 800, Istambul University Library, complété par le manuscrit Or. 516, Leiden University Library), Franckfort, 1985, p. 24-27.

des deux est droit et enfin dans le cas où l'un des deux est obtus (sa démonstration fait encore intervenir l'axiome de Pasch et l'axiome d'Archimède ainsi que la possibilité de mener d'un point extérieur à une droite une perpendiculaire à cette droite et l'unicité de cette perpendiculaire).

Dans le second texte, Ibn al-Haytham ne tente plus de démontrer le postulat 5, mais propose de le remplacer par un autre postulat, qui pour lui est « plus évident pour le sens et plus présent à l'âme » et dont il démontre qu'il est équivalent au premier : deux droites sécantes quelconques ne sont pas parallèles à une même droite.

Al-Khayyæm (1048-1131) qui rejette l'utilisation du mouvement en géométrie, critique la démonstration d'Ibn al-Haytham[9]. Il remplace le mouvement par le principe, qu'il attribue à Aristote, selon lequel deux lignes droites qui convergent dans une direction divergent dans l'autre. Il considère ensuite un quadrilatère ayant deux angles droits à sa base et des côtés latéraux égaux, il montre d'abord que les deux angles restants sont égaux, puis montre par l'absurde que ces deux angles ne peuvent être ni aigus ni obtus (deux droites s'écarteraient ou se rapprocheraient simultanément dans des directions opposées). Il en déduit que deux droites perpendiculaires à une même troisième sont équidistantes, puis que deux droites parallèles sont équidistantes ; il montre ensuite que, si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, les angles alternes internes sont égaux (*Éléments* I, 29) ; il en déduit enfin le postulat 5 (il admet, au cours de ces démonstrations, que si deux droites sont parallèles toute droite qui coupe l'une coupe l'autre).

NaÒîr al-Dîn al-Tºsî (1201-1274) enfin, rapporte, en en soulignant points faibles et pétitions de principe, les démonstrations de ses prédécesseurs[10] avant de donner la sienne propre qui reprend, comme il le dit lui-même, certains éléments de la démonstration de Khayyæm (essentiellement le fait que dans un quadrilatère ayant deux angles droits à sa base et des côtés latéraux égaux, les deux angles restants sont droits et les côtés restants sont égaux). Il ne suppose pas, comme ce dernier que si deux droites se rapprochent d'un côté elles s'éloignent de l'autre, mais admet que, si deux droites sont jointes par des sécantes perpendiculaires à l'une et faisant avec l'autre des angles aigus tous situés d'un même côté, les deux droites se rapprochent du côté des angles aigus (et finissent par se rencontrer) et s'éloignent de l'autre côté. Il montre ensuite que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits (d'abord dans le cas d'un triangle rectangle, puis dans le cas d'un triangle obtusangle et enfin dans le cas d'un triangle acutangle). Il en déduit enfin le postulat 5, d'abord dans le cas où l'un des deux angles intérieurs est droit, puis dans le cas où les deux angles intérieurs sont aigus, et enfin dans le cas où l'un des deux angles intérieurs est obtus (en utilisant encore les axiomes de Pasch et d'Archimède). Une variante de cette démonstration figure dans la rédaction des *Éléments* due à un de ses élèves (Pseudo-Tusi), version imprimée (en arabe) à Rome en 1594 (voir *infra*, Transmission 2).

N. B. : Deux des démonstrations que nous venons d'évoquer font explicitement appel au mouvement. Le mouvement n'intervient théoriquement pas dans la géométrie grecque, sinon

[9] Al-Khayyæm, « Commentaires sur les difficultés de certains postulats du livre d'Euclide », R. Rashed et B. Vahabzadeh, *al-Khayyæm mathématicien*, Blanchard, Paris, 1999, p. 271-383.
[10] NaÒîr al-Dîn al-™ºsî, *op. cit.*.

comme un pis aller[11], et son introduction n'a pas manqué de poser des problèmes aux commentateurs, en particulier à Proclus pour qui son rôle n'est autre que d'assurer l'engendrement (continu) d'une ligne par un point (puisque la ligne ne saurait être constituée de points). Le mouvement joue en revanche un rôle croissant dans les proto-topologies qui font leur apparition aux IXe-Xe siècles, c'est lui qui fonde la continuité des lignes et assure l'existence de leurs points d'intersection (voir les travaux sur la résolution géométrique des équations du troisième degré) ; c'est sur lui, on l'a vu, que se fonde pour Thæbit ibn Qurra et Ibn al-Haytham l'existence de droites équidistantes ; Ibn al-Haytham en fait même, dans son ouvrage *Les connus* une des notions primitives de la géométrie.

2. LA POSTERITE DE L'ŒUVRE D'APOLLONIUS

L'œuvre d'Apollonius, essentiellement *Les Coniques*, a, à partir du IXe siècle, profondément marqué le développement des sciences mathématiques dans le monde arabe[12] ; Apollonius y est le mathématicien le plus cité et le plus étudié après Euclide. La (ou les) traduction arabe des sept livres des *Coniques* a été faite à Bagdad au IXe siècle, à l'instigation des Banº Mºsæ, y auraient participé Îilæl ibn Abî Îilæl al-Îimsî ainsi que le grand mathématicien Ÿæbit ibn Qurra ; ces traductions ont été suscitées par les recherches géométriques en cours, essentiellement celles des Banº Mºsæ[13]. La traduction arabe des *Coniques* a inauguré toute une tradition : regain d'intérêt pour les problèmes solides — en particulier la trisection de l'angle et la construction de l'heptagone régulier[14] —, application des coniques à des problèmes issus d'autres domaines comme l'optique (miroirs ardents et lentilles), la résolution géométrique des équations du troisième degré (travaux d'al-Khayyæm et de Sharaf al-Dîn al-™ºsî), ou encore la théorie des astrolabes, des cadrans solaires ou du compas parfait ; ces applications feront découvrir en retour de nouvelles propriétés de ces courbes — propriétés focales, étude des asymptotes, propriétés locales, propriétés harmoniques. Cet usage des coniques, débordant le cadre de la géométrie euclidienne et prolongeant les travaux d'Apollonius, conduira les mathématiciens, et tout particulièrement Ibn al-Haytham, à des réflexions aux frontières des mathématiques et de la philosophie sur la nature des courbes recevables en géométrie et sur la distinction entre existence et constructibilité.

2.1. *Le renouveau des problèmes solides*

Les problèmes solides, dont on sait qu'ils ont inspiré les mathématiciens grecs dès la plus haute Antiquité et dont les premières tentatives de résolution sont contemporaines des premiers travaux sur les coniques, vont également, à partir du IXe siècle intéresser les mathématiciens du monde arabe. Il faut noter que, dans le monde grec, ces problèmes ont donné lieu à des contributions

---

[11] Les rares exceptions que l'on rencontre chez Euclide sont, dans les *Éléments*, la démonstration des deux premiers cas d'égalité des triangles (par superposition) et la définition de la sphère, ainsi que, dans Les *Données*, la démonstration proposition 26 (*si les extrémités d'une ligne droite sont données de position, cette droite est donnée de position et de grandeur*).

[12] P. Abgrall et H. Bellosta, « Geometria delle coniche, luoghi, contatti e costruzioni », *Storia della scienza*, éd. Sandro Petruccioli, Roma, Instituto della Enciclopedia Italiana,10 vol., 2001-, vol. III, 2002, *La Civiltà islamica* (1500 pages) éd. R. Rashed, R. Morelon, U. Weisser p. 402-423.

[13] Voir Réception 1, *supra*. Voir également R. Rashed, M. Decorps et H. Bellosta, *Apollonius de Perge, Œuvres complètes grec, arabe et français* (De Gruyter, à paraître).

[14] R. Rashed, *Les mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle*, vol. III, *Ibn al-Haytham : Théorie des coniques, constructions géométriques et géométrie pratique*, al-Furqæn, Londres, 2000.

dispersées, sans caractère méthodique lié à leur statut de problèmes solubles par intersections de coniques ; les géomètres grecs n'hésitent pas, pour les résoudre, à recourir à des courbes transcendantes (quadratrice, conchoïde) sans chercher à prouver l'existence d'un point d'intersection de ces courbes, ou à des *neusis* (constructions de type mécanique à l'aide d'une règle mobile). À partir du IXe siècle dans le monde arabe, à la lecture des *Coniques* d'Apollonius, ces problèmes solides vont être massivement repris, les méthodes unifiées, les résolutions par *neusis* progressivement abandonnées et l'on n'aura plus recours aux courbes transcendantes.

La duplication du cube, le plus ancien de ces problèmes solides, va, entre le IXe et le XIe siècle, être résolue par plusieurs méthodes : celle des Banº Mºsæ (IXe siècle), par intersection d'un cylindre droit, d'un tore et d'un cône droit[15], celle d'Abº Ja'far al-Khæzin (première moitié du Xe siècle) par intersection d'une hyperbole et d'un cercle[16], méthode reprise, avec quelques variantes, par un certain Abº Bakr al-Harawî (peut être Ahmad Ibn Abi Sa'd al-Harawî à qui l'on doit la plus ancienne version qui nous soit parvenue des *Sphériques* de Ménélaüs, à la fin du Xe siècle), par al-Qºhî (deuxième moitié du Xe siècle) ainsi que par NaÒîr al-Dîn al-™ºsî (XIIIe siècle). Ibn Hºd al-Mu'taman, (roi de Saragosse entre 1081 et 1085), dans son ouvrage l'*Istikmæl*, en donne quatre constructions[17] : par intersection d'une parabole et d'une hyperbole, par intersection de deux paraboles (comme al-Khayyæm dans son traité d'algèbre[18]), par intersection d'une hyperbole et d'un cercle (méthode d'al-Khæzin), et enfin par intersection d'un cercle et d'une parabole.

La trisection de l'angle va tout d'abord, dans la première moitié du IXe siècle, être résolue par des méthodes hellénistiques (*neusis* ou courbes transcendantes), par Thæbit ibn Qurra et les Banº Mºsæ[19] (intersection d'un arc de conchoïde de cercle et d'une droite). Dans la seconde moitié du Xe siècle, al-Qºhî en donne une solution reposant sur l'intersection d'un cercle et d'une hyperbole ; al-Sijzî à la fin du Xe siècle résume les méthodes de plusieurs de ses contemporains (Abº al-Îasan al-Harawî, al-Bîrºnî — à qui l'on doit trois méthodes — et al-∑æghænî) et propose une construction permettant de démontrer toutes les autres.

La construction de l'heptagone régulier fait, à partir de la seconde moitié du Xe siècle, l'objet d'un véritable engouement. Les plus grands mathématiciens de cette période Abº al-Jºd, al-Sijzî, al-Qºhî, al-∑æghænî, Ibn al-Haytham, mais aussi Ibn Sahl et al-Shannî, s'intéressent à ce problème qui suscite polémiques, compétitions, accusations de plagiat et querelles de priorité. Au XIe siècle, Ibn al-Haytham synthétise tous ces travaux et rédige un mémoire qui met un terme à cette tradition de recherche, en étudiant de manière exhaustive toutes les solutions possibles de ce problème, c'est-à-dire toutes les façons possibles de construire les triangles d'angles multiples de $2\pi/7$ à partir desquels on construit un heptagone régulier[20].

---

15 R. Rashed, *Les mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle*, vol. I, *Fondateurs et commentateurs*, al-Furqæn, Londres, 1996, p. 116-129.

16 Wilbur Knorr, *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry*, Boston, Basel, Berlin, 1989.

17 Jan P. Hogendijk, *Four constructions of two mean proportionals between two given lines in the Book of Perfection Istikmæl of al-Mu'taman ibn Hºd*, dans "Journal for History of Arabic Science", vol. 10, 1992-93-94, pp. 13-29.

18 R. Rashed et B. Vahabzadeh, *Al-Khayyæm mathématicien*, Paris, 1999, p. 152-157.

19 R. Rashed, *Mathématiques infinitésimales*, vol. I, p. 128-133.

20 R Rashed, *Mathématiques infinitésimales*, vol. III, p. 647-944.

2.2. *L'achèvement des* **Coniques** *d'Ibn al-Haytham*

Ibn al-Haytham a également rédigé un traité intitulé *Sur l'achèvement de l'ouvrage des Coniques*, première tentative de restitution du livre VIII des *Coniques* d'Apollonius[21]). Ce traité se présente comme un recueil de problèmes de constructions géométriques relatifs à certains segments associés à des sections coniques : tangentes, diamètres ou côtés droits. Les 5 premiers problèmes par exemple consistent à déterminer un point B d'une conique de sommet A, de telle sorte que la tangente en B coupe l'axe en un point E tel que $\frac{BE}{EA} = k$. Dans chaque cas Ibn al-Haytham donne de ce problème une analyse, une synthèse et un diorisme (discussion des cas de possibilité). Ces problèmes plans ou solides sont systématiquement résolus à l'aide d'une intersection de deux coniques (même dans le cas de problèmes plans). Les diorismes consistent alors dans l'étude de l'existence des points d'intersection de ces coniques, le cas limite correspondant au cas où les deux courbes sont tangentes. L'étude de ces cas limites repose sur les propriétés asymptotiques et locales des coniques. On retrouve un écho de ces travaux dans l'œuvre de Sharaf al-Dîn al-™ºsî, dans un contexte algébrique maintenant, pour discuter du nombre de racines d'une équation du troisième degré, discussion déjà ébauchée par al-Khayyæm.

2.3. *Les recherches des géomètres arabes dans la postérité des petits traités d'Apollonius*

Outre son magistral traité sur *Les Coniques*, Apollonius est l'auteur de six traités, cités par Pappus dans l'introduction au livre VII de la *Collection mathématique* comme appartenant au champ de l'analyse[22]. Ces traités sont les suivants : *La Section de rapport*, *La Section d'aire*, *La Section déterminée*, *Les Contacts*, *Les Inclinaisons*, et *Les Lieux plans*. Aucun de ces six traités ne nous est parvenu en grec. Nous possédons une traduction anonyme arabe de *La Section de rapport* faite vraisemblablement au IX^e^ siècle[23]. Les bio-bibliographes arabes évoquent en outre, parmi les œuvres d'Apollonius, trois autres traités : *La Section d'aire*, *La Section déterminée* et *Les Contacts*. *Les Lieux plans* et *Les Inclinaisons* en revanche ne nous sont connus que par quelques énoncés que Pappus dit reproduire dans la *Collection Mathématique* ; autant que nous sachions, ces deux traités n'ont pas été traduits en arabe. Des mathématiciens arabes, notamment Ibn Sinæn (X^e^ siècle) et Ibn al-Haytham (XI^e^ siècle), se sont cependant posé certains des problèmes des *Lieux plans* : Ibn Sinæn résout en particulier les problèmes de déterminer un point M tel que $\frac{MA}{MB} = k$ (k rapport donné), ou tel que $MA^2 - k.MB^2 = s$ (k rapport donné, $k \neq 1$, s surface donnée). Il donne trois démonstrations du premier problème, dont une analyse qu'il attribue à Apollonius et qui constitue la seule indication que nous ayons de cette démonstration[24]. Le premier problème a également inspiré Ibn al-Haytham. Une différence importante entre Ibn Sinæn et Ibn al-Haytham est que le premier résout le problème géométrique donné alors que le second le transforme en une recherche explicite du lieu des points solution. Apollonius étudiait également dans le traité des *Lieux plans* ce que Fermat au XVII^e^ siècle interprètera en termes d'images par des transformations du plan (affines ou anallagmatiques) de certains sous ensembles

---

21 R. Rashed, *Mathématiques infinitésimales*, vol. III, p. 27-272.
22 Pappus d'Alexandrie, *La Collection mathématique*, éd. P. Ver Eecke, 2 vols., rééd. Paris, 1982, vol. II, pp. 477-512.
23 R. Rashed, M. Decorps et H. Bellosta, *Apollonius de Perge, Œuvres complètes*.
24 R. Rashed et H. Bellosta; *Ibræhîm ibn Sinæn : logique et géométrie au X^e^ siècle*, Brill, Leyde, 2000.

du plan (droites ou cercles). On trouve des études du même genre que celle de Fermat dans le monde arabe, indépendamment des *Lieux plans*, tout particulièrement dans deux traités d'Ibn al-Haytham : le traité sur *L'analyse et la synthèse*, et surtout le traité sur *Les Connus* dans lequel celui-ci étudie, sans faire allusion le moins du monde à Apollonius, les images de droites et de cercles par des similitudes directes et des translations[25].

En effet, si ces traités d'Apollonius n'ont eu que peu ou pas d'influence sur ses contemporains (à part Pappus aucun mathématicien grec n'y fait allusion), leur influence sur les mathématiciens arabes des Xe et XIe siècles, comme après eux sur les mathématiciens européens des XVIe et XVIIe siècles a été considérable : de par leur difficulté et leur variété, les problèmes résolus dans ces traités, dont ils n'ont connu parfois que l'énoncé ou des textes corrompus, ont excité la curiosité des mathématiciens de ces époques. Ce sont les énoncés de ces problèmes, plus que les solutions qu'Apollonius leur avait apportées, qui ont suscité l'intérêt des géomètres du monde arabe tels Ibræhîm Ibn Sinæn[26], al-Sifizî, al-Qºhî[27], Ibn al-Haytham et ont fécondé leur réflexion ; ils en ont donné leurs propres solutions, souvent marquées par leurs conceptions nouvelles de l'analyse géométrique[28]. Ces travaux auront leur pendant en Europe où, à partir du XVIe siècle, une partie non négligeable de l'activité mathématique va consister en des tentatives de restitution de ces traités perdus d'Apollonius : ces tentatives sont bien connues et ont, entre autres, occupés des mathématiciens aussi considérables que Viète ou Fermat.

2.4. *Les propriétés optiques des coniques et leur construction continue*

Les recherches sur les miroirs ardents et les lentilles qui se poursuivent dans le monde arabe dans la postérité des travaux grecs et hellénistiques donnent une nouvelle impulsion aux études sur les coniques (étude des propriétés dites optiques des trois sections coniques).

Ibn Sahl[29] (Xe siècle) est l'auteur d'un opuscule sur les coniques dans lequel il démontre des propriétés harmoniques de ces courbes, lesquelles prolongent les propriétés III 38-40 des *Coniques* d'Apollonius. Dans son traité *Sur les instruments ardents* dont l'objet est d'étudier toutes les manières d'embraser en un point donné, à l'aide d'une source lumineuse lointaine (rayons parallèles) ou proche (rayons issus d'un point), en utilisant la réflexion (miroir parabolique ou miroir ellipsoïdal) ou la réfraction (lentille plan convexe ou lentille biconvexe), il est conduit à étudier les propriétés optiques des coniques (dans le prolongement de l'œuvre de

[25] R. Rashed, *Les mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle*, vol. IV, *Ibn al-Haytham : Méthodes géométriques, transformations ponctuelles et philosophie des mathématiques*, al-Furqæn, Londres, 2002, p. 393-584.

[26] H. Bellosta, « Les mathématiciens arabes et le problème des *Contacts* », *Oriens-Occidens*, cahiers du Centre d'histoire des sciences et des philosophies arabes et médiévales, n°1, 1997, p. 105-122.

H. Bellosta, « Ibræhîm Ibn Sinæn, Apollonius arabicus », *Perspectives arabes et médiévales sur la tradition scientifique et philosophique grecque*, Paris/Leuven, Institut du Monde Arabe/Peeters, 1997, p. 31-48.

[27] P. Abgrall, « Les cercles tangents d'al-Qºhî », *Arabic Sciences and Philosophy*, vol. 5, n°2, 1995, pp. 263-295.

[28] Le traité sur la section de rapport joue pour le géomètre Ibn Sinæn, auteur du premier traité théorique sur l'analyse et la synthèse, le rôle de paradigme d'analyse et de synthèse classiques

R. Rashed et H. Bellosta, *Ibræhîm ibn Sinæn : logique et géométrie au Xe siècle*.

[29] R. Rashed, *Géométrie et dioptrique au Xe siècle, Ibn Sahl, al-Qºhî et Ibn al-Haytham*, Les Belles Lettres, Paris, 1993, p. 1-82.

Dioclès[30]). Cette étude est rendue possible par sa maîtrise de la théorie des coniques (propriétés focales, propriétés des tangentes et des plans tangents). La recherche d'un modèle géométrique d'instrument propre à résoudre le problème posé (embraser) débouche alors naturellement sur le problème de la construction continue des trois sections coniques, connaissant leurs foyers et leurs sommets (coniques à centre) ou leur foyer et leur directrice (parabole), puisque ce sont ces éléments qui définissent les propriétés optiques de ces courbes. Il les construit à l'aide d'un système de règles coulissantes ou pivotantes, de fils non déformables et de poulies. Pour la construction de l'ellipse, il reprend la méthode du jardinier, exposée pour la première fois par Anthémius de Tralles, qu'il perfectionne quelque peu par l'usage de poulies.

A la même époque (X^{e} siècle) on voit apparaître des traités sur le compas parfait comme ceux d'al-Sijzî[31] et al-Qºhî[32] et plus tard d'Ibn al-Haytham (XI^{e} siècle) ; le compas parfait est un instrument permettant de tracer les coniques d'un mouvement continu. Ces études sur le compas parfait ne sont pas tant destinées à résoudre le problème de la constructibilité des coniques dans un plan, que celui de leur continuité. Ils révèlent la volonté des mathématiciens de légitimer les constructions par intersection de coniques pour résoudre les problèmes solides, et de leur conférer le même statut que celui des constructions à la règle et au compas pour la résolution des problèmes plans. Cela conduira les mathématiciens (Ibn al-Haytham essentiellement) jusqu'à cette région commune aux mathématiques et à la philosophie qu'est l'examen de la distinction entre la construction d'un objet mathématique et la démonstration de son existence. Le traité *des Coniques* suscitera d'autres réflexions d'ordre philosophique chez les mathématiciens : à la fin du X^{e} siècle, al-Sijzî s'intéressera au caractère infini de la propriété de l'asymptote à une hyperbole et cherchera à fonder cette propriété sur des bases solides.

3. L'USAGE DES TRANSFORMATIONS

3.1 *Les projections*

Le développement de l'astronomie à partir du IX^{e} siècle va induire de nouvelles directions de recherches en mathématiques ; pour résoudre les problèmes posés par les astronomes, les mathématiciens vont en effet être amenés à appliquer leurs théories à de nouveaux objets, et même à développer un certain nombre de théories nouvelles. Tout d'abord, afin de construire des astrolabes, dont la demande, à partir du IX^{e} siècle, est de plus en plus importante, et donne naissance à une profession reconnue comme telle, celle des « astrolabistes » (*al-as†urlæbî*), la nécessité se fait jour d'obtenir une représentation plane exacte de la sphère céleste ; cette nécessité va susciter une multiplication des recherches sur les projections. Si l'on trouvait déjà chez Ptolémée la notion de projection stéréographique, les mathématiciens arabes (al-Kindî et les Banº Mºsæ au IX^{e} siècle, Ibn Sinæn, al-Sifizî, mais surtout Ibn Sahl et al-Qºhî au X^{e} siècle) vont élaborer une première théorie des projections de la sphère sur un plan, projections cylindriques d'axes quelconques, et projections coniques à partir d'un point quelconque. Cette théorie mathématique nouvelle, née des besoins de l'astronomie, va assez vite se développer indépendamment de la construction des astrolabes ; les projections deviennent en elles-mêmes un

[30] Dioclès (entre la première moitié du II^{e} siècle BC et la première moitié du I^{er} siècle AD) démontre pour la première fois la propriété foyer-directrice de la parabole (absente des *Coniques* d'Apollonius). La propriété foyer directrice pour les coniques à centre se trouve chez Pappus III^{e}-IV^{e} siècle AD.

[31] R. Rashed, *Œuvre mathématique d'al-Sijzî*, vol. I, *Géométrie des coniques et théorie des nombres*, Peeters, Louvain, 2004.

[32] P. Abgrall, *Le développement de la géométrie aux IX^{e}- X^{e} siècles: Abº Sahl al-Qºhî*, Blanchard, Paris, 2004.

objet d'étude et un domaine de recherches, ouvrant ainsi un nouveau chapitre de géométrie, non hellénistique.

3.2. *Les transformations affines*

Le traité de Thæbit ibn Qurra, *Sur les sections du cylindre et sur sa surface latérale*[33], se situe dans la double postérité du traité perdu qu'Ahmad ibn Mºsæ aurait consacré à l'ellipse (sans doute définie par la propriété bifocale, et dont il aurait également calculé l'aire) et des *Coniques* d'Apollonius. Dans ce traité, Thæbit fait intervenir pour la première fois des transformations géométriques ponctuelles (projections cylindriques, affinités orthogonales, homothéties) dont il démontre et utilise certaines propriétés. En s'inspirant du modèle des *Coniques*, il élabore une théorie du cylindre et de ses sections planes : il remplace les droites issues du sommet par des parallèles à une génératrice du cylindre, ce qui revient très exactement à considérer le cylindre comme un cône dont le sommet serait à l'infini dans une direction. Il montre alors que la section de ce cylindre par un plan est soit un cercle (plan parallèle à la base ou antiparallèle) soit une ellipse. Il définit deux ellipses semblables par la proportionnalité de leurs axes respectifs. Il montre ensuite que les sections planes de deux cylindres à bases circulaires ayant même axe et même hauteur sont homothétiques, le centre d'homothétie étant leur centre commun situé sur l'axe et le rapport de l'homothétie étant le rapport des diamètres des cercles de base. Il montre enfin qu'une ellipse de grand axe $AC = 2a$ et de petit axe $2b$ est l'image par l'affinité orthogonale d'axe (AC) et de rapport $\frac{b}{a}$ du cercle de diamètre $[AC]$. C'est de cette propriété qu'il déduit l'aire de l'ellipse et l'aire des segments elliptiques. Il discute également des sections maximales et minimales d'un cylindre, et détermine l'aire de la partie de la surface du cylindre comprise entre deux sections planes. Il donne également une proposition concernant les rapports des périmètres d'ellipses semblables, premier théorème à traiter du périmètre des ellipses.

Ibn Sinæn (909-946), petit fils de Thæbit Ibn Qurra, dans son traité *Sur la mesure de la parabole*[34], fait intervenir, de façon magistrale, le concept de transformation affine mis en œuvre par Thæbit ; sa détermination de l'aire du segment de parabole repose sur le fait que toute transformation affine bijective transforme un segment de parabole en un segment de parabole dont la base est l'image de la base et le sommet l'image du sommet et laisse invariante la proportionnalité des aires des polygones et des segments de parabole. Si les transformations affines (homothéties, translations similitudes planes, changements d'inconnues du type $x' = k.x$ etc.) interviennent assez souvent dans l'œuvre d'Ibn Sinæn, le traité *Sur la mesure de la parabole* est cependant le seul traité dans lequel est définie de la façon la plus générale une transformation affine quelconque.

On doit au même Ibn Sinæn un traité sur la construction par point des trois coniques[35] (en l'absence d'instrument connu de lui pour le tracé continu de ces courbes), qui fait encore largement appel aux transformations ponctuelles. Reprenant les résultats de Thæbit, Ibn Sinæn donne une construction par points de l'ellipse à partir de son cercle principal reposant sur le fait que celle-ci est l'image du cercle principal par une affinité orthogonale. Il donne également la construction par points d'une parabole et d'une hyperbole à partir d'un cercle (dans le cas de

---

[33] R. Rashed, *Mathématiques infinitésimales*, vol. I, p. 458-674.
[34] R. Rashed, *Mathématiques infinitésimales*, vol . I, p. 695-736.
[35] R. Rashed et H. Bellosta, *Ibn Sinæn : Logique et géométrie au Xe siècle*, p. 263-290.

l'hyperbole celle-ci est alors l'image du cercle par une transformation projective involutive) ; il montre ensuite que deux hyperboles ayant le même diamètre transverse et dont les ordonnées font le même angle se déduisent les unes des autres par des affinités obliques.