حَوْلَ القيمَةِ المَعْرِفيَّةِ الرِياضِيَّةِ المُتَأَتِّيَةِ من اسْتِنْباطِ مُبَرْهَنَةِ الجُيوبِ في التُراثِ العِلْمِيِّ العَرَبِيّ

محمّد يوسف الحجيريّ

(فريق الدراسة والبحث في التراث العلميّ العَرَبِيّ؛ الجامعة اللُبنانيّة والمجلس الوطنيّ للبُحوث العلميّة–لبنان)

لبنان – طرابلُس، القبّة، شارع الأرز، كليّة الهَنْدَسَة

houjairi@hotmail.com

١– ظاهِرَةُ الانْشِطارِ كآلِيَّةٍ لتَكَوُّنِ النَظَرِيَّاتِ الرياضِيَّةِ

غالِباً ما تَنْطَوي آلِيَّةُ تَكَوُّنِ النَظَرِيّاتِ الرِياضِيَّةِ الجَديدَة (إن يَكُن على المُسْتَوَى الحَدْسِيِّ التَجْريبِيِّ أو على المُسْتَوَى النَظَرِيِّ) على عَمَلِيَّاتٍ انشِطارِيَّةٍ نَوْعِيَّةٍ تَحْدُثُ في صُلْبِ النَظَرِيّاتِ القَديمَة. وَعَلَى الرَّغْمِ مِنَ التَوافُقِ والانْسِجامِ الأكيدَيْنِ لتِلْكَ الآلِيَّةِ الأنطولوجيَّة "التَكَوُّنيَّة" مع المبادِئِ المَعْرِفِيَّةِ العامَّة (أيْ مبادِئ الحَتْمِيَّةِ والسَبَبِيَّةِ والضَرورةِ وغَيْرِها)، فمِن جهَةٍ أُولَى، يَعودُ السَبَبُ المُباشِرُ الكامِنُ وَراءَ تِلْكَ العَمَلِيّاتِ الانشِطارِيَّةِ إلى تَراكُمٍ في المَعْلوماتِ والمَسائِلِ المَطْروحةِ، وإلى تَناقُضاتٍ داخِلِيَّةٍ بين خَواصّ الكائناتِ الرِياضِيَّةِ المُسْتَجدَّةِ على التَحْليلِ والتَمْحيصِ، كما يَعودُ ذلك من جهَةٍ أُخرى، إلى مَحْدودِيَّةِ وقُصورِ اللُّغَةِ والمَقولاتِ القَديمَةِ المُسْتَخْدَمَةِ في هذا المضمارِ. وبالضَبْط هذا ما نَجِدُنا نَتَلَمَّسُهُ عِنْدَ تحليلنا لتاريخِ الرِياضِيّاتِ عُموماً وَمِنْها الكُرَوِيّاتُ في الحِقْبَةِ العَرَبِيَّة.

٢- لَمْحَةٌ عن تاريخٍ مُمَهِّدٍ لتَبَلْوُرِ المَفْهومِ ولاسْتِنْباطِ مُبَرْهَنَةِ الجُيوب

أدّت البُحوثُ الفَلَكِيَّةُ والجغرافِيَّةُ الرياضِيَّةُ الحَثيثَةُ الّتي قام بها علماءُ الحِقْبَةِ العَرَبِيَّةِ ما بين القَرْنَيْنِ التاسعِ والحادي عشر إلى تَطَوُّرٍ قَلَّ نَظيرُهُ في التاريخ. لقد راكَمَ هؤلاء العُلماءُ المُعْطَياتِ والمَعْلوماتِ والمَسائلَ والطَرائقَ المُخْتَلِفَةَ في عِلْمِ الأُكَرِ. وارتَكَزَت بُحوثُهم في البَدءِ على مُبَرْهَناتٍ وتِقَنِيّاتٍ كُرَوِيَّةٍ أفْضَت باستِمرارٍ إلى مُبَرْهَنَةِ مانالاوس (الشَكْلِ القطّاع)[1]، الّتي كان لا مَفَرَّ لِلهَنْدَسِيِّين والفَلَكِيِّين آنذاك من تطبيقِها المُتَكَرِّرِ على قِسِيٍّ دَوائرَ عُظْمَى في البَسيطِ الكُرِيِّ، وذلك عَبْرَ استخدامِ أبْنِيَةٍ هَنْدَسِيَّةٍ تركيبيَّةٍ إضافِيَّةٍ كانت تُثْقِلُ البَراهينَ وطَرائقَ الاستِدلالِ الهَنْدَسِيّ.

ولقد استَنَدَ رياضِيّو تِلْكَ الحِقْبَةِ إلى كِتابِ مانالاوس في الأُكَرِ كمُؤلَّفٍ يَدْرُسُ الأشكالَ الهَنْدَسِيَّةَ على بسيط الكُرَةِ. ولكنّهم أفْلَحوا بأن طَوَّروا ودَفَعوا هذا العِلْمَ بعيداً. نَجِدُ لَدَى أولئك الرياضِيِّين العَديدَ من المؤلَّفاتِ حَوْلَ مُبَرْهَنَةِ مانالاوس وأشكالِ كتابِهِ المُختَلِفَة، فقد كَتَبَ عن ذلك ابنُ قُرَّة، والسِجْزِيُّ، وابنُ عراق، والهَرَوِيُّ، والخُجَنديُّ وأبو الوفاء والبيرونيُّ وابنُ هود والطوسيُّ والمغربيُّ وغيرُهم.

[1] انْظُرْ كُرَوِيّات مانالاوس-ابن عراق، ص. ٦٢-٦٤ (من النصّ العربيّ):
Die Sphärik von Menelaos aus Alexandrien in der verbesserung von Abū Naṣr Manṣūr B. 'Alī B. 'Irāq von Max Krause, Islamic Mathematics and Astronomy, vol. 37, Frankfurt, 1998.
"الشَكل الأوّل،
قوسا **ج؟ه ب؟د** تلتقيان على نقطة **ا** وأُخرج من نقطَتَي **ج ب** قوسا **ج؟د ب؟ه** متقاطعتين على نقطة **ز** وكلّ واحدةٍ من القسيّ الأربع من محيط دائرة عظيمة في الكرة وكلّ واحدةٍ منها أصغر من نصف المحيط، فأقول إنّ نسبة جيب **ج؟ه** إلى جيب **ه؟ا** مؤلّفةٌ من نسبة جيب قوس **ج؟ز** إلى جيب قوس **ز؟د** <ومن نسبة جيب قوس **ب؟د** إلى جيب قوس **ب؟ا**>".

ولقد كان تيودوثيوس الطرابُلسيّ قد وَضَعَ في القرنِ الأوّلِ قبل الميلاد كتاباً في الهَنْدَسَةِ الأوّليَّةِ للكُرَة[٢] وهو على غِرارِ *أصول*[٣] أقليدس يَجْمَعُ المعارفَ السابقَةَ ذات الصِلَةِ بالكُرَةِ والّتي – وَفْقَ ما يُعْتَقَدُ – قد عُرِفَ الجُزْءُ الأكبرُ منها قَبْلَ وَضْعِ الكتابِ بزمنٍ بعيد. وتجدُرُ الإشارةُ هنا إلى أنّ كتابَ تيودوثيوس يَرْتَكِزُ في غالِبيَّةِ براهينهِ (ذات السمَةِ التَرْكيبيَّةِ) على مُبَرْهَنَات[٤] *أصول* أقليدس. وبعد تيودوثيوس بأقلِّ من قَرْنٍ، أي في أواسِطِ القَرْنِ الأوّل بعد الميلاد وارتكازاً على كتابِ تيودوثيوس، وَضَعَ مانالاوس كتابَه في الأُكَرِ وكانت هَنْدَسَةُ مانالاوس تِلْكَ أوّلَ هَنْدَسَةٍ لاإقليديّةٍ مَعْروفةٍ في التاريخ (إذ مَثَّلَت الخُطوات الأُولى نحو هَنْدَسَةِ ريمان الإهْليليجيَّة ذات الإنحناء الإيجابيّ الثابت).

لقد حُفِظَت النُسخةُ اليونانيّةُ من كتابِ تيودوثيوس في حين فُقِدت النُسخةُ اليونانيَّة من كتابِ مانالاوس. ولِحُسنِ الحَظِّ، فإنّ التَرْجَمَةَ العَرَبيَّةَ للكتابِ قد وَصَلَت إلينا سليمَةً، وذلك في تَحْريرِ هَنْدَسِيِّي الحِقْبَةِ العَرَبيَّة من أمثالِ ابنِ عراق والهَرَويّ وغيرهم. وتجدرُ الإشارةُ هنا إلى أنّ بابوس الإسكندرانيّ (القرن الرابع الميلاديّ) قد تناولَ في مَجْموعتِهِ الرِياضِيَّةِ[٥] بعضَ

[٢] انْظُرْ:

Les Sphériques de Théodose de Tripoli (107-43 avant J.-C.) (trad. Paul Ver Eecke [Paris, 1959]).

[٣] انْظُرْ:

Traduction française dans le livre « *Les œuvres d'Euclide* », F. Peyrard, Paris 1993.

[٤] انْظُرْ:

Al-Houjairi M., *L'Encyclopédie d'Ibn Hūd*, thèse doctorale (Univ. Paris 7, 2005), vol. I (Chapitre 1)

[٥] انْظُرْ:

Pappus d'Alexandrie, *La Collection Mathématique*. Traduit par P. Ver Eecke, Paris 1982)

المسائلِ المطروحةِ في أُكَرِ تيودوثيوس ومانالاوس. ولكنّ دراستَهُ المَحْدودةَ تلك لم تَكُنْ مَعْروفَةً لَدَى الهَنْدَسِيّين العَرَبِ وَفْقَ ما يُجمِعُ عَلَيهِ مؤَرِّخو الرياضيّات الّتي كُتِبَت باللُّغةِ العَرَبيّة.

٣- القيمَةُ المَعْرِفِيَّةُ الرياضِيَّةُ في اسْتِنْباط مُبَرْهَنَةِ الجيوب

يُعَرِّفُ مانالاوس في كتابه في الأُكَرِ الزاويةَ والمُثَلَّثَ الكُرَوِيَّيْن، بَيْدَ أنّ مُبَرْهَنَتَه الأساسيَّةَ (المُسَمّاة الشَكْل القطّاع) لا تتناولُ بِشَكْلٍ مُباشِرِ المثلّثَ الكُرَويَّ، إنّما تَتَعَلّقُ برُباعيٍّ أضلاع. واستِناداً إلى المُعطيات المَعْرِفِيَّةِ الراهِنَةِ، من البَديهِيِّ القَوْلُ إنّه ما كانَ لِرُباعِيِّ الأضلاعِ أن يُمَثِّلَ "الوَحْدَةَ البُنْيَويَّةَ" الفُضْلى في الاسْتِدلالِ الهَنْدَسِيِّ على بسيطِ الكُرَةِ، فالدَورُ المُلائمُ الأنسَبُ كانَ يَنْبَغي أن يَلْعَبَهُ المثلّثُ الكُرَويُّ، لِكَوْنه الشَكْلَ الجُزْئِيَّ البُنْيَويَّ الأبسطَ، فرُباعيُّ الأضلاعِ يَنْقَسِمُ مثلاً إلى مُثَلَّثَيْنِ اثنين. وهذا التَفاوُتُ البَيِّنُ الّذي يَكْتَسِبُ بِجَوْهَرِهِ أبعاداً فَلْسَفِيَّةً ومَعرِفِيَّةً تَتَعَدَّى المَضْمونَ الرياضِيَّ لَتَطالَ الخواصّ البُنْيَويّةَ للكائنات الهندسيّة، قد صَحَّحَتهُ بالفِعْلِ البُحوثُ الحَثيثَةُ والنَتائجُ المُهِمَّةُ الّتي تَعودُ إلى هَنْدَسِيِّي التَقليدِ العِلْمِيِّ العَرَبِيّ. ولربّما كان لهذا التَصْحيحِ أثرٌ أو صورةٌ أو أصلٌ ما لَدَى فلاسِفَةِ ذلك العَصْرِ من المُهتمّين بالرياضيّات. وبالطبعِ، هذا سؤالٌ مَطروحٌ ينتظرُ الردَّ عليه من خلال بُحوثِ مُؤَرّخي الفلسَفَةِ العَرَبِيَّةِ آنذاك. لقد أفْضَت إذاً الطرائقُ الّتي ابتَكَرَها رِياضِيّو وفَلَكِيّو الحِقْبَةِ العَرَبِيَّةِ، في مَعْرِضِ حِساباتِهم للقِسيِّ المجهولةِ على بسيطِ الكُرَةِ، فضلاً عمّا راكموه من معلوماتٍ في هذا المجالِ، إلى عَمَلِيَّةٍ انشطاريّةٍ نوعِيَّةٍ تَمَثَّلَت نتيجتُها بظهورِ علمٍ جديدٍ ألا

وهو عِلْمُ المُثَلَّثات، الّذي يَرْتَكِزُ بمَضمونه على مُبَرْهَنَةِ الجيوب (الشَكْل المُغْني)[٦] وعلى المُثَلَّث الكُرَوِيّ "كَوَحْدَةٍ بنيَويَّةٍ" للاستدلال الهَنْدَسيّ على البسيطِ الكُرِيّ. ونحن نعلمُ اليومَ أنّ الهَنْدَسَةَ اللاإقليديَّةَ ذات الانحناءِ السلْبيّ الثابتِ قد اكتُشِفَت نتيجةَ أبحاثٍ مُسْتَقِلَّةٍ لثلاثةِ عُلَماء وهم لوباتشيفسكي وبولاي وغاوس، والمُلْفِتُ أنّ الأمرَ نفسَهُ قد حَدَثَ عِنْدَ اكتشافِ مُبَرْهَنَةِ الجيوبِ في أبحاثِ أبي نصرٍ بنِ عراق وأبي محمود الخُجَنْدِيّ وأبي الوفاء البوزجانيّ.

تَخَطَّى عُلَماءُ الحِقْبَةِ العَرَبِيَّةِ إذاً مُبَرْهَنَةَ مانالاوس، فاكتَشَفوا قاعِدَةَ الجيوب الّتي سُمِّيَت آنذاك "الشَكْل المُغْنيّ". وعلى طريقِهم نحو اكتِشافِ هذه القاعدَةِ، استَخْدَموا تِقَنيّةَ المُثَلَّثِ القُطْبِيّ الّذي مَثَّلَ استِخْدامُه في براهينهم أهَمِيَّةً قُصْوَى، نَظَراً لارتباطِهِ المباشِرِ بأكثَر المبادئ رسوخاً في الاستِدلالاتِ العِلميَّةِ اللاّحِقة، ألا وهو مبدأ الثنائِيّة.

لقد شَكَّلَ اكتشافُ مُبَرْهَنَةِ الجيوبِ حَجَرَ الزاوِيَةِ في بَلْوَرَةِ عِلْمِ الهَنْدَسَةِ الكُرَوِيَّةِ وعِلْمِ المُثَلَّثاتِ كنَظَرِيّتَيْن رياضِيَّتَيْنِ مُلائِمَتَيْنِ يُقارِبُ مُسْتواهُما المَعْرِفِيُّ "المُسْتَوَى النَظَرِيَّ" المُتَقَدِّم. كما مَهَّدَ هذا الاكتشافُ إلى انشطارٍ لاحِقٍ مُكتَمِلٍ عن الهَنْدَسَةِ الإقليديّة. وتتمَحورُ القيمةُ المَعْرِفِيَّةُ الرياضِيَّةُ المُتَرَتِّبَةُ على هذا الاكتشافِ حول النقاطِ الاساسِيّةِ التالية:

[٦] انْظُرْ ما يُوردُه البيرونيُّ بصَدَدِ ذلك، مَثَلاً، في كتاب ديبارنو (ص. ١١١):
Marie-Thérèse Debarnot, dans *Al-Bīrūnī, Kitāb Maqālīd 'Ilm Al-Hay'a.* Institut Français de Damas. Damas, 1985.
"طريق أبي نصر في الشَكْلِ المُغني من رسالته إليّ: نسبةُ جيوب الأضلاع في المثلّث الكائن من قِسيٍّ عظامٍ على سطح الكرة، بعضُها إلى بعض، على نسبة جيوب الزوايا التي تقابلُها، بعضُها إلى بعض، النظيرُ إلى النظير..."

١- تُوَفِّرُ مُبَرْهَنَةُ الجيوبِ إمكانيّــةَ الاسْــتِنْباطِ الجَــوْهَرِيِّ (intrinsèque) في استدلالاتِنا حول ما نُصادِفُه من مسائلَ على بسيطِ الكُرَةِ، وذلك دون العَوْدِ إلى هَنْدَسَةِ الفَضاءِ الخارجيِّ إي إلى هَنْدَسَةِ إقليدس. كما أنّها تُعَبِّرُ عن اللامُتَغَيِّــرِ الأكثر شُموليَّةً وعُمْقاً في البُنْيَةِ الهَنْدَسِيّةِ للبسيطِ الكُريّ.

٢- تُغْني هذه المُبَرْهَنَةُ عن استخدامِ الوسائلِ التَرْكيبيَّةِ والأبْنِيَةِ المُضافَةِ الّتي كان لا مَفَرَّ منها عِنْدَ استخدامِ مُبَرْهَنَةِ منالاوس في الاستدلال.

٣- تُلائم هذه المُبَرْهَنَةُ الكائناتِ الهَنْدَسِيّةَ الكُرَوِيَّةَ لأنّها تتّخذُ المثلّثاتِ كَوَحْدَةٍ مُكوِّنةٍ، وذلك خلافاً لمُبَرْهَنَة مانالاوس الّتي تتبنّى رباعيَّ الأضــلاع التــامَّ في العمليّات الهَنْدَسِيّة. وغالِباً ما يُمَكِّنُنا هذا التَلاؤمُ عَبْرَ تَطْبيقِ مُبَرْهَنَةِ الجُيوبِ من تَحديدِ الكائنِ الكُرَوِيِّ بمُقارَبَةٍ يكون استِثْناؤها تَقايُساً.

٤- تَعْكِسُ هذه المُبَرْهَنَةُ بِجَوْهَرِها قانوناً طبيعيّا، وليس رِياضِيّاً فحسب، وهــو قانون الثُنائِيَّةِ بين الكائناتِ الرِياضِيَّة.

٥- تَفْتَحُ هذه المُبَرْهَنَةُ الدَرْبَ واسِعاً أمامَ تَطْبيقِ الطُرُق التَحْليلِيَّةِ لِلاّمُتناهِيَــةِ في الصِغَرِ وذلك نَظَراً لِتَوْفيرِها إمكانيّةَ مُقارَبَةِ الأشكالِ المُنْحَنِيَةِ الإحاطَةِ اللاّمُتَناهِيَةِ في الصِغَرِ بواسِطَةِ أشكالٍ مُسْتَقيمَةِ الإحاطَةِ، وهذا ما نَجِدُه بالفِعْلِ عِنْدَ ابــنِ الهيثم في مَعْرِضِ حِساباتِهِ التَحْليلِيَّةِ لِلحُجومِ والمِساحات.

٤- أمثِلَةٌ وشُروحٌ لِمَقاطِعَ مَخْطوطِيَّة

وبِهَدَفِ إقامَةِ الدليلِ المَلْموسِ على ما ذُكِرَ، سَوْفَ نَتَناوَلُ بــالتَحْقيقِ والشَرْحِ، فيما يلي، جُمْلَةً من مَقاطِعَ مَخْطوطِيَّةٍ تعودُ إلى ابنِ عراق وابنِ هود[٧].

[٧] انْظُرْ مَخْطوطَةَ كوبنهاغن، شَرْقِيّ ٨٢.

كما أنّنا سَنَعْتَمِدُ البُرْهانَ "الظريف" الذي يُورِدُه ابنُ هود "للشَكْلِ القطّــاع". والبُرْهانُ المَذْكورُ والوارِدُ في "الشَكْلَيْنِ" اللاّحِقَيْنِ يَخْتَلِفُ عن بُرْهانِ مانالاوس وقد أثْبَتْنا أنّ ابنَ هود قد اقْتَبَسَه بِطَريقَةٍ ما عن ثابتٍ بنِ قُرَّة[٨].

[٨] سَنَعْتَمِدُ في الشَرْحِ الرياضيِّ الرموزَ التاليةَ: drt (زاوِيَة قائمة)؛ angle(A) (الزاوِيَــة A)؛ extr(A) (الزاوِيَة الخارجة من الرأس A)؛ arc(AB) (القوس AB)؛ arc(C) (محيط الدائرة C)؛ cercle(AB) (الدائرة المَبْنِيَّة على القـــوسِ AB)؛ crd(AB) (الــوتر AB)؛ sgm(AB) (القطعة المستقيمة AB)؛ hom(AB) (نظير القوس AB)؛ long(a) (طول القوس أو القطعة a)؛ hem(A) (نصفُ الكُرَةِ الّتي رأسُها في النُقطَةِ A)؛ plan(C) (السطح المُستوي للـــدائرة C)؛ نُشير بالرمز (⊥) إلى علاقةِ التَعامدِ. نستعمل المزدوجين < > في النصّ العربيّ لفصلِ ما أضيف بُغيةَ سَدِّ ثغرةٍ ما في النصِّ المخطوطيّ. نستعمل المزدوجين [ ] في النصِّ العربيّ لفصل ما ينبغي حذفُه من النصّ المخطوطيّ ليُصبحَ المعنى سَوِيّاً. نستعملُ الرمزَ (/) للدَلالَةِ علـــى نهايةِ الصفحةِ المخطوطيّة. والجدير بالذكر أنّنا قد أضَفْنا رسوماً هندســيّةً بُغيـــةَ تـــسهيل الاستيعاب.

لقد رقّمنا قضايا كُرَوِيّات *الاستكمال* الواردةِ هنا وَفْقَ الترقيمِ المُعْتَمَدِ في أطروحتنا [انْظُرْ: Al-Houjairi M., *L'Encyclopédie d'Ibn Hūd*, thèse doctorale (Univ. Paris 7, 2005)].

وسَوْفَ نُشيرُ في ما يلي باختصارٍ إلى هذا المَرْجِع بِ"*موسوعة* ابن هود".

إضافةً إلى مخطوطة "كوبنهاغن، شَرْقي ٨٢، سَوْفَ نعودُ تكراراً إلى الكتابَيْن التالِيَيْن:

1) *Les Œuvres d'Euclide*, trad. F. Peyrard, Paris, 1993.

(سَوْفَ نختصرُ تَسْمِيَةَ هذا الكتاب بِ*أصول* إقليدس)

2) *Die Sphärik von Menelaos aus Alexandrien in der verbesserung von Abū Naṣr Manṣūr B. 'Alī B. 'Irāq von Max Krause*, Islamic Mathematics and Astronomy, vol. 37, Frankfurt, 1998.

(سَوْفَ نختصرُ تَسْمِيَةَ هذا الكتاب بِ*كرويّات* مانالاوس–ابن عراق). لقد اعتمدنا في هذا الكتاب الترقيمَ الوارِدَ في النصّ المخطوطيّ العربيّ.

ط - <شكل رقم ٣٤>

كلّ دائرتين من الدوائر العظام التي تقع في بسيط الكرة، تُفصل من إحداهما قوسان أقلّ من نصفي دائرة ممّا يلي إحدى نقطتَي تقاطعهما، ويُخرج من طرفَي القوسين عمودان على سطح الدائرة الأُخرى؛ فإنّ نسبة وتر ضعف أحد القوسين إلى وتر ضعف القوس الأُخرى منهما كنسبة العمود الخارج من طرفها إلى العمود الخارج من طرف القوس الأُخرى، كانت القوسان جميعاً في جهةٍ واحدةٍ أو في جهتين مختلفتين؛ مثال ذلك دائرتا ا ب جـ د ا هـ جـ و وهما من الدوائر العظـــام التي في بســـيط الكرة / وقد تقاطعتا على نقطتي ا جـ وفُصل 83-و
من دائرة ا جـ هـ و قوسان كلٌّ واحدةٍ[1] منهما أقلّ من نصف دائرة، وهما ا هـ ا ز. وأُخرج من هـ ز عمودان على سطح دائرة ا ب جـ د؛ فأقول إنّ نسبة وتر ضعف قوس ا هـ إلى وتر ضعف قوس ا ز كنسبة العمود الذي أُخرج من نقطة هـ إلى العمود الذي أُخرج من نقطة ز؛

برهان ذلك: أنّ الفصل المشترك لدائرتَي ا ب جـ د ا هـ جـ و هما قطراهما، فليكن قطر ا جـ، ونُخرج من نقطتَي هـ ز عمودين على ا جـ وهما هـ ح ز ط؛ فإن كانا عمودين على سطح دائرة ا ب جـ فقد تبيّن ما أردنا، لأنّهما جيبا قوسي ا هـ ا ز؛ وإن لم يكونا كذلك، فإنّا نُخرج من نقطتي هـ ز عمودين على سطح دائرة ا ب جـ د وهما هـ كـ ز ل ، فيكونا متوازيين؛ ونُخرج أيضا خطّي ل ط ، كـ ح. وخطّا هـ ح ز ط أيضا متوازيان؛ وإن وازى خطّان يحيطان بزاوية خطّين آخرين يحيطان بزاوية أُخرى، فإنّ الزاويتين متساويتان[2]؛ فزاوية ح هـ كـ مساوية لزاوية ط ز ل. وزاويتا هـ كـ ح ز ل ط قائمتان؛ فمثلّثا هـ ح كـ ز ط ل متشابهان؛ فنسبة هـ ح إلى ز ط كنسبة هـ كـ إلى ز ل، ولكنّ نسبة هـ ح إلى ز ط كنسبة وتر ضعف قوس ا هـ إلى وتر ضعف قوس ا ز، لأنّهما جيباهما؛ فنسبة وتر ضعف قوس ا هـ إلى وتر ضعف قوس ا ز كنسبة عمود هـ كـ، إلى عمود ز ل؛ وكذلك نبيّن كما قلنا، لو أنّ إحدى[3] قوسَي ا هـ ا ز من جهة ا و؛ وذلك ما أردنا ان نبيّن.

[1] واحدة: واحد؛
[2] هذا الحكم غير دقيق، فقد يكون، مثلاً، مجموع الزاويتين مساوياً لقائمتين؛
[3] أحد: أضافها الناسخ على الهامش، بعد أن ضرب بالقلم فوق كلمة نسبة؛

الشَرْح الرِياضِيّ

الفَصْلُ التاسع

القَضِيَّة ٣٤

لِتَكُنْ (C_1) وَ (C_2) دائِرَتَيْن عَظيمَتَيْن على الكُرَة حَيْثُ يَتَقاطَعُ مُحيطاهُما $arc(C_1)$ وَ $arc(C_2)$ على النُقْطَتَيْن A وَ C. إذا كانَت E وَ G نُقْطَتَيْن مُخْتَلِفَتَيْن عن A وَ C واقِعَتَيْن على $arc(C_1)$ وإذا كانَت النُقْطَتان K وَ L مُسْقَطَيْهما العَمودِيَّيْن على سَطْحِ دائِرَةِ (C_2) ، تَتَحَقَّقُ عِنْدَئِذٍ العلاقَةُ التالية

$$\frac{crd(2arc(AE))}{crd(2arc(AG))}=\frac{sgm(EK)}{sgm(GL)} \quad (1).$$

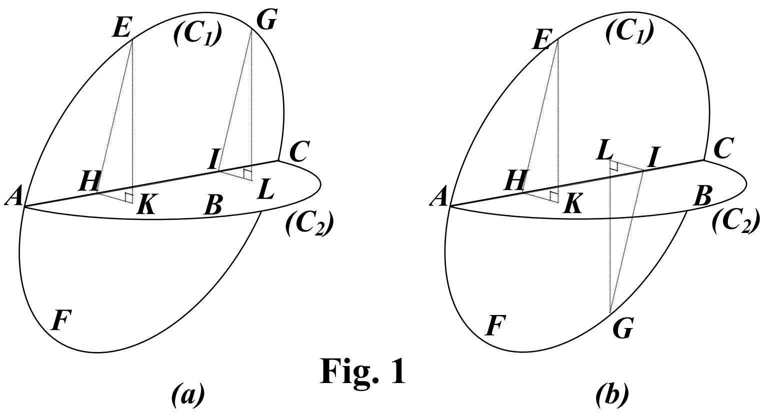

Fig. 1

البُرْهان:

تَتَقاطَعُ الدائِرَتان العَظيمتان (C_1) وَ (C_2) تِبْعاً لقُطْرِهما المُشْتَرَكِ AC (انْظُرِ الشَكْلَ ١). لِنَرْمُزْ بِـ H وَ I على التَرْتيبِ إلى مَسْقَطَي العَمودَيْن المُخْرَجَيْن من النُقْطَتَيْن E وَ G على المستقيمِ AC . إذا تَعامَدَ سَطْحا الدائِرَتَيْن (C_1) وَ (C_2)

تَنْطَبِقُ على التَوالي النُقْطَتان H وَ I مع النُقْطَتَيْن[٩] K وَ L وتَكون العلاقَـــةُ (1) مُحقّقةً لأنّ

$$crd(2arc(AE)) = 2\ sgm(EH)$$

وَ

$$crd(2\ arc(AG)) = 2\ sgm(GI).$$

لِنَفْتَرِضِ الآن أنّ سَطْحَيِ الدائِرَتَيْن (C_1) وَ (C_2) غيرُ مُتَعامِدَين، لا تَنْطَبِقُ عِنْدَئذٍ لا H وَ K ولا I وَ L ؛ ويكـــونُ المُثلّثـــان EHK وَ GIL مُتَـــشابِهَيْن[١٠] لأنّ الزاوِيتَيْن angl(EKH) وَ angl(GLI) مُتَـــساوِيَتان (قائِمَتـــان)[١١] و تَتَـــساوَى كذلك الزاوِيَتان[١٢] angl(HEK) وَ angl(IGL) وبالتالي فالزاوِيَتان الباقِيَتـــان angl(KHE) وَ angl(LIG) مُتَساوِيَتان أيضاً. وهذا ما يَسْتَتْبِعُ العلاقةَ

$$\frac{sgm(EH)}{sgm(GI)} = \frac{sgm(EK)}{sgm(GL)},$$

ولكنّ

$$\frac{sgm(EH)}{sgm(GI)} = \frac{crd(2arc(AE))}{crd(2arc(AG))},$$

[٩] انْظُرْ ص. ٤٤١ من *أصول* إقليدس

Livre XI, proposition 38, p. 441: “Si un plan est perpendiculaire à un autre plan, et si d’un point pris dans un de ces plans, on mène une perpendiculaire à l’autre plan, cette perpendiculaire tombera sur la section commune des plans”.

[١٠] انْظُرْ نَفْسَ المَرْجِع السابق، ص. ١٤٣-١٤٤

Livre VI, proposition 4: “Dans les triangles équiangles, les côtés autour des angles égaux sont proportionnels; et les côtés qui sous-tendent les angles égaux, sont homologues”.

[١١] انْظُرْ نَفْسَ المَرْجِع السابق، ص. ٣٩٦

Livre XI, définition 3: “Une droite est perpendiculaire à un plan, lorsqu’elle fait des angles droits avec toutes les droites qui la rencontrent, et qui sont dans ce plan”.

[١٢] كلٌّ واحدةٍ من الزاوِيَتين حادّةٌ وضِلْعاهما مُتَوازِيان ثُناءً.

وذلك لأنّ

$$sgm(EH) = Sin(arc(AE))$$[13]

ووَفْقَ التَحْديدِ

$$sgm(GI) = Sin(arc(AG)).$$

وهذا ما يَسْتَتْبِعُ العلاقةَ

$$\frac{crd(2arc(AE))}{crd(2arc(AG))} = \frac{sgm(EK)}{sgm(GL)}.$$

لقد أشارت ماري تريز ديبارنو إلى نتيجةٍ منسوبةٍ إلى ثابتٍ بن قُــرّة[١٤] تَتَطابَقُ مع القَضِيَّةِ ٣٤ وتُفضي هذه القَضِيَّةُ وَفْقَ ديبارنو إلى بُرْهــانٍ ظريــف لُمبَرْهَنَةِ مانالاوس. ولقد تَطَرَّقَت هيلين بيللوستا إلى نفسِ الموضوع[١٥].

[١٣] وَفْقَ التحديد لدينا

$$Sin(arc(AE)) = R.sin(arc(AE))$$

حيث نرمز بِ R إلى نصفِ قُطرِ الكُرَةِ.

[١٤] انْظُرْ:

Extrait du livre de Thābit-Ben-Korrah: *De la figure du quadrilatère et des rapports composés*, dans le *Traité du quadrilatère* (*Kitāb al-Shakl al-qaṭṭāʿ*) d'al-Ṭūsī, Islamic Mathematics and Astronomy, vol. 47. Traduction française d'Alexandre Pacha Caratheodory, Constantinople, 1891; réédition: Frankfurt, 1998, livre 5, page 200-201.

[١٥] انْظُرْ:

Hélène Bellosta, "Le Traité de Thābit ibn Qurra sur *La figure secteur*", *Arabic Sciences and Philosophy*, vol. 14, Number 1, March 2004, pp. 145-168.

ي - <شكل رقم ٣٥>

وإذ قدّمنا هذه المقدّمة، فلتتقاطع فيما بين قوسي ا ب ب جـ قوسا ا د جـ هـ على نقطة و، ولتكن هذه القسيّ من الدوائر العظام التي تقع في الكرة، ولتكن كلّ قوس منها أقلّ من نصف دائرة؛

فأقول إنّ نسبة وتر ضعف قوس ا ب إلى وتر ضعف قوس ب هـ مؤلّفةٌ من نسبة وتر ضعف قوس ا د إلى وتر ضعف قوس د و ومن نسبة وتر ضعف قوس و جـ إلى وتر ضعف[٤] قوس جـ هـ؛

وبرهان ذلك: أنّا نخرج من نقط ا هـ و أعمدةً على سطح دائرة قوس ب جـ، وهي أعمدة ا ز هـ حـ و ط ونجعل عمود و ط وسطاً في النسبة بين عمودَي ا ز هـ حـ؛ فتكون نسبة ا ز إلى هـ حـ مؤلّفةً من نسبة ا ز إلى و ط ومن نسبة و ط إلى هـ ح، فأمّا نسبة عمود ا ز إلى عمود هـ حـ فقد بيّنا بالمقدّمة، أنّها كنسبة وتر ضعف قوس ا ب إلى وتر ضعف قوس ب هـ؛ وأمّا نسبة عمود ا ز إلى عمود و ط فكنسبة وتر ضعف قوس ا د إلى وتر ضعف قوس د و؛ وأمّا نسبة عمود و ط إلى عمود هـ حـ فنتبيّن أنّها كنسبة وتر ضعف قوس و جـ إلى وتر ضعف قوس جـ هـ؛ فنسبة وتر ضعف قوس ا ب إلى وتر ضعف قوس ب هـ مؤلّفة من نســـبة وتر ضعف قوس ا د إلى وتر ضعف قوس و د ومن نســـبة وتر ضعف قوس جـ و إلى وتر ضعف قوس جـ هـ.

وأقول أيضا إنّه على جهة التفصيل: تكون نسبة وتر ضعف / قوس ا هـ إلى وتر 83-ظ ضعف قوس ب هـ مؤلّفةً من نسبة <وتر> ضعف قوس ا و إلى وتر ضعف قوس و د، ومن نسبة وتر ضعف قوس جـ د إلى وتر ضعف قوس جـ ب.

وبرهان ذلك: أنّا نُخرج من نقط ا ب د إلى سطح دائرة قوس جـ و هـ أعمدة ا ز ب كـ د ل ونجعل د ل وسطاً في النسبة بين عمودَي ا ز ب كـ؛ فتكون نسبة عمود ا ز إلى عمود ب كـ مؤلّفةً من نسبة عمود ا ز إلى عمود د ل ومن نسبة عمود د ل إلى عمود ب كـ؛ فأمّا نسبة عمود ا ز إلى عمود ب كـ فكنسبة وتر ضعف قوس ا هـ إلى وتر ضعف قوس ب هـ؛ وأمّا نسبة عمود ا ز إلى عمود د ل فكنسبة وتر ضعف قوس ا و إلى وتر ضعف قوس و د؛ وأمّا نسبة عمود د ل إلى عمود ب كـ فهي كنسبة وتر ضعف قوس د جـ إلى وتر ضعف قوس جـ ب، كما تبيّن في المقدّمة التي قدّمنا؛ فنسبة وتر ضعف قوس ا هـ إلى وتر ضعف قوس هـ ب مؤلّفةٌ من نسبة وتر ضعف قوس ا و إلى وتر ضعف قوس و د، ومن نسبة وتر ضعف قوس جـ د إلى وتر ضعف قوس جـ ب. وذلك ما أردنا أن نبيّن.

[٤] كُتب على الهامش: "ونبدأ على الترتيب وامّا على <العكس>، فنسبة وتر <ضعف قوس ألف ها> إلى وتر ضعف قوس با ها مؤلّفة من نسبة وتر ضعف قوس <ألف واو> إلى وتر ضعف قوس واو دال ومن نسبة وتر ضعف قوس جيم دال إلى وتر ضعف قوس جيم با"؛

الشَرْح الرِياضِيّ

الفَصْلُ العاشِر

القَضِيَّة ٣٥

لِتَكُنْ arc(AB) وَ arc(BC) وَ arc(AD) وَ arc(EC) أربعَ قِسيٍّ من دَوائرَ عظيمةٍ غيرِ موجودةٍ ثُناءً في سَطْحٍ مُشتركٍ واحد ولتَكُنْ كُلُّ واحدةٍ من تِلْكَ القِسيِّ أصغرَ من نِصْفِ مُحيطِ دائِرَةٍ عُظْمَى ولتَقَعِ النُقْطَةُ E على arc(AB) والنُقْطَةُ D على arc(BC) . إذا ما تَقاطَعَتِ القَوْسان arc(EC) وَ arc(AD) على نُقْطَةٍ F، تَتَحَقَّقُ عِنْدَئذٍ العلاقتان

$$1)\qquad \frac{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(AB))}{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(BE))}=\frac{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(AD))}{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(DF))}\cdot\frac{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(FC))}{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(CE))},$$

$$2)\qquad \frac{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(AE))}{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(BE))}=\frac{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(AF))}{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(FD))}\cdot\frac{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(DC))}{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(CB))}.$$

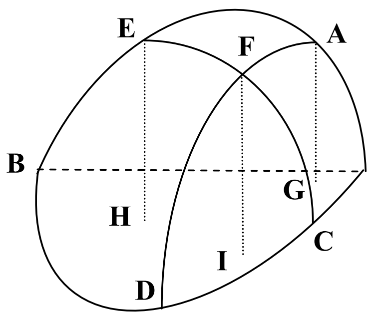

Fig. 2

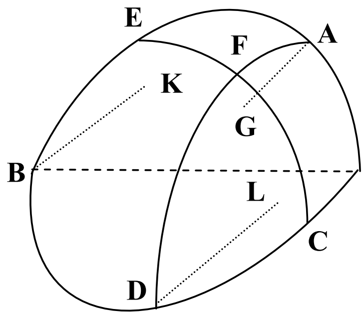

Fig. 3

البُرْهان:

١) لِنُخْرِجْ مــن النقــاطِ A وَ E وَ F الأعْمِــدَةَ sgm(AG) وَ sgm(EH) وَ sgm(FI) على سَطْحِ دائِرَةِ cercle(BC) (انْظُرِ الشَكْلَ ٢)، فَيَكونُ لَدَيْنا وَفْقَ القَضِيَّةِ ٣٤

$$\frac{\text{sgm(AG)}}{\text{sgm(EH)}}=\frac{\text{crd(2arc(BA))}}{\text{crd(2arc(BE))}},\ \frac{\text{sgm(AG)}}{\text{sgm(FI)}}=\frac{\text{crd(2arc(DA))}}{\text{crd(2arc(DF))}},$$

وَ

$$\frac{\text{sgm(FI)}}{\text{sgm(EH)}}=\frac{\text{crd(2arc(CF))}}{\text{crd(2arc(CE))}}.$$

وإذا استَخْدَمْنا المُتَطابِقَةَ

$$\frac{\text{sgm(AG)}}{\text{sgm(EH)}}=\frac{\text{sgm(AG)}}{\text{sgm(FI)}}\cdot\frac{\text{sgm(FI)}}{\text{sgm(EH)}}$$

نحصلُ على العلاقةِ

$$\frac{\text{crd(2arc(AB))}}{\text{crd(2arc(BE))}}=\frac{\text{crd(2arc(AD))}}{\text{crd(2arc(DF))}}\cdot\frac{\text{crd(2arc(FC))}}{\text{crd(2arc(CE))}}.$$

٢) لِنُخْرِجْ من النقــاطِ A وَ B وَ D الأعْمِــدَةَ sgm(AG) وَ sgm(BK) وَ sgm(DL) على سَطْحِ دائِرَةِ cercle(CF) (انْظُرِ الشَكْلَ ٣)، فيكونُ لدينا وَفْقَ القَضِيَّةِ ٣٤

$$\frac{\text{sgm(AG)}}{\text{sgm(BK)}}=\frac{\text{crd(2arc(AE))}}{\text{crd(2arc(EB))}},\ \frac{\text{sgm(AG)}}{\text{sgm(DL)}}=\frac{\text{crd(2arc(AF))}}{\text{crd(2arc(FD))}},$$

وَ

$$\frac{\mathrm{sgm}(DL)}{\mathrm{sgm}(BK)}=\frac{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(DC))}{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(CB))}.$$

وإذا استَخْدَمْنا المُتَطابِقَةَ

$$\frac{\mathrm{sgm}(AG)}{\mathrm{sgm}(BK)}=\frac{\mathrm{sgm}(AG)}{\mathrm{sgm}(DL)}\cdot\frac{\mathrm{sgm}(DL)}{\mathrm{sgm}(BK)},$$

نحصلُ على

$$\frac{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(AE))}{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(BE))}=\frac{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(AF))}{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(FD))}\cdot\frac{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(DC))}{\mathrm{crd}(2\mathrm{arc}(CB))}.$$

نَجِدُ نفسَ القَضِيَّةِ لَدَى مانالاوس ولكنّ البُرْهانَ مُخْتَلِفٌ (انْظُرِ الحاشِيَةَ ١).

يا - <شكل رقم ٣٦>

إذا كانت زاويتان من زوايا شكلين من الأشكال ذوات الأضلاع الثلاثة على بسيط كرةٍ متساويتين؛ وكانت زاويتان أُخريان من زواياهما إمّا متساويتين وإمّا مساويتين لزاويتين قائمتين إذا جُمِعتا[٥]؛ فإنّ نسبة نظيرَي الضلعين اللّذين يوتّران الزاويتين[٦] المتساويتين إلى نظيرَي الضلعين اللّذين يوتّران الزاويتين الأُخريين المتساويتين[٧] أو المساويتين لقائمتين، هما نسبتان متساويتان، وعكس ذلك أيضا؛ وأعني بقولي نظير القوس الخطّ المستقيم الذي يوتّر ضعفها؛

فليكن شكلان ذوا ثلاثة أضلاع، عليهما ا ب جـ د هـ ز ولتكن الزاوية التي عند ا من أحدهما مساوية للزاوية التي عند د من الآخر؛ ولتكن الزاويتان منهما اللّتان عند نقطَتَي[٨] جـ ز إمّا متساويتين وإمّا مساويتين لزاويتين قائمتين<إذا جُمِعتا>؛

فأقول إنّ نسبة نظير ا ب إلى نظير ب جـ كنسبة نظير د هـ إلى نظير هـ ز[٩]؛

برهانه: أنّا نُخرج قوسَي جـ ا ب ا إلى ح وَ ط[١٠]، ونجعل قوس ا ح مثل قوس د ز، وزاوية ا ح ط مساويةٌ لزاوية هـ ز د؛ ونُخرج قوسَي جـ ب ح ط حتى تلتقيا على نقطة ك فتكون قوس ا ط مساويةً لقوس هـ د وقوس ط ح لقوس هـ ز؛ ولأنّ زاويَتَي ب جـ ا ا ح ط إمّا متساويتان[١١] وإمّا مساويتان لزاويتين قائمتين إذا جُمِعتا؛ يكون نظير قوس جـ ك مساوياً[١٢] لنظير قوس ك ح؛ ولأنّ الصورة على ما هي عليه، تكون نسبة نظير قوس ط ح إلى نظير قوس ك ح مؤلّفةً من نسبة نظير قوس ط ا إلى نظير قوس ا ب، ومن نسبة نظير قوس ب جـ إلى نظير قوس جـ ك؛ ولكنّ نظير قوس جـ ك مساوٍ لنظير قوس ك ح،

[٥] يتبيّن من هذا وممّا يلي أنّ المقصود زاويتان مساويتان لزاويتين قائمتين إذا جُمِعتا وذلك رغم تكرار الخطأ المتمثّل باستعمال كلمة "قائمتان" عِوضاً عن كلمة "متساويتان".

[٦] الزاويتين: الزاويتان؛

[٧] الأُخريين المتساويتين: القائمتين؛

[٨] نقطتي: نقطة؛

[٩] زاي: دال؛

[١٠] ب ا إلى ح و ط: جيم با، ألف طا؛

[١١] متساويتان: قائمتين؛

[١٢] وضع الناسخ إشارة فوق كلمة "مساويا" وكتب على الهامش: "تبيّن ذلك في الشكل الثالث من هذا الفصل إذا تدبّر"؛

فتكون نسبة نظير قوس ح ط إلى نظير قوس ک جـ مؤلّفةً من نسبة نظير قوس ط ا إلى نظير قوس ا ب، ومن نسبة نظير قوس ب جـ إلى نظير قوس جـ ک؛ ونجعل ب جـ وسطاً في النسبة بين ح ط وَ جـ ک؛ فتكون أيضا نسبة نظير قوس ح ط إلى نظير قوس / جـ ک مؤلّفة من نسبة نظير قوس ح ط إلى نظير قوس 84-و
جـ ب، ومن نسبة نظير قوس جـ ب إلى نظير قوس جـ ک، فإذا طرحنا نسبة نظير قوس جـ ب إلى نظير قوس جـ ک من كلتا النسبتين تبقى نسبة نظير قوس ح ط إلى نظير قوس ب جـ كنسبة نظير قوس ط ا إلى نظير قوس ا ب، وإذا بدّلنا أيضا تكون متناسبة؛ ولكن قوس ط ح مساوية لقوس هـ ز، وقوس ا ط مساوية لقوس هـ د، فنسبة نظير قوس جـ ب إلى نظير قوس ا ب كنسبة نظير قوس هـ ز إلى نظير قوس هـ د؛ وأيضا فانّا نجعل الزاوية التي عند نقطة ا مساويةً للزاوية التي عند نقطة د، ولتكن نسبة نظير قوس جـ ب إلى نظير قوس ا ب كنسبة نظير قوس هـ ز إلى نظير قوس هـ د، فأقول إنّ الزاويتين اللّتين عند نقطتَي جـ ز إمّا متساويتان[13] وإمّا مساويتان <إذا جمُعتا> لزاويتين قائمتين،

وبرهانه، أنّا إذا عملنا مثل العمل المتقدّم كانت نسبة نظير قوس جـ ب إلى نظير قوس ا ب كنسبة نظير ح ط إلى نظير ا ط، وإذا بدّلنا كانت أيضا متناسبة؛ فإذا كانت الصورة على ما هي عليه فإنّ نظير قوس ح ک يكون مساويا لنظير قوس ک جـ، وتكون لذلك زاويتا ط ح ا ا جـ ب اللّتان هما الزاويتان اللّتان عند نقطتي جـ ز إمّا متساويتين[14] وإمّا مساويتين لزاويتين قائمتين إذا جمُعتا؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

[13] متساويتان: قائمتان؛
[14] متساويتين: قائمتين

الشَرْحُ الرِياضِيّ

الفَصْلُ الحادي عشر

تحديد:

نظيرُ القَوْسِ هو القطعةُ المُستقيمةُ الّتي تُوَتِّرُ ضِعْفَيْ تِلْكَ القَوْس.

القضية ٣٦ (قاعدة المقادير الأربعة)

لِيَكُن ABC وَ DEG مُثَلَّثين كُرَوِيَّيْن ولِيَكُن

angle(A) = angle(D).

١) إذا تَساوَت الزاوِيتان angle(C) وَ angle(G) أو إذا كانَ مَجْموعُهما مُساوياً لزاويتَيْن قائِمَتَيْن، تَتَحَقَّقُ عِنْدَئِذٍ العلاقةُ

$$\frac{\mathrm{hom}(AB)}{\mathrm{hom}(BC)} = \frac{\mathrm{hom}(DE)}{\mathrm{hom}(EG)}.$$

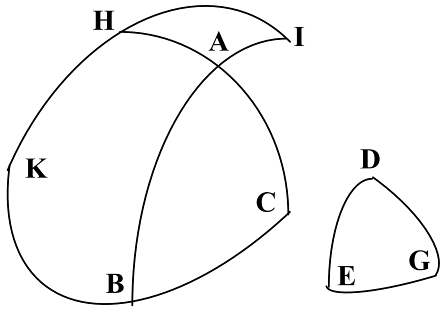

Fig. 4

٢) إذا تَحَقَّقَتِ العلاقةُ

$$\frac{\mathrm{hom}(AB)}{\mathrm{hom}(BC)} = \frac{\mathrm{hom}(DE)}{\mathrm{hom}(EG)},$$

فإمّا أن تَتَساوَى الزاوِيَتان angle(C) وَ angle(G) وإمّا أن يكونَ مَجْموعُهما مُساوِياً لِزاوِيتَيْن قائِمَتَيْن (انْظُرِ الشَكْلَ الرابِعَ).

البُرْهان:

لنأخُذْ مُثلّثين كُرَوِيَّيْن ABC و DEG بحَيْثُ يكون

angle(A) = angle(D).

لنُطِل arc(CA) من جهَةِ A حتّى النُّقْطَةِ H بحَيْثُ تـصيرُ قَـوْسُ arc(AH) مُساويةً لقَوْسِ arc(DG) ولنُطِل arc(AB) من جهَةِ A حتّى النُقْطَةِ I بحَيْـثُ تصيرُ الزاويةُ angle(AHI) مُساويةً للزاويَةِ angle(EGD) ولنُطل arc(CB) وَ arc(IH) ترتيباً من جِهَتَي B وَ H وليَتَقاطَعا على نُقْطَةِ K. وَفْقَ القَـضِيَّةِ ٢٨ (الحالة G_1)[١٦]، المثلّثان EGH وَ IHA مُتَساوِيَان، فإذاً

angl(AIH) = angl(E),

وَ

arc(HI) = arc(GE),

وَ

arc(IA) = arc(ED),

(انْظُرِ الشَكْلَ ٤).

١) لنفترض أوّلاً أنّ الزاويتَيْن angle(C) وَ angle(G) مُتَساوِيَتان، تكـون إذاً الزاويتان angle(C) وَ angle(IHA) مُتَساوِيَتَيْن أيضاً لأنّ الزاوية angle(IHA) تساوي angle(G). ووَفْقَ القَضِيَّةِ العكسيّةِ للقَضِيَّة[١٧] ٢٤ يكـونُ المَجْمـوعُ arc(HK) + arc(KC) مُساوِياً لنصفِ مُحيطِ دائِرَةٍ عُظْمَـى، ولـذلك فـإنّ hom(HK) = hom(KC).

[١٦] انْظُرْ موسوعَةَ ابنِ هود: القضيّة ٢٨ (G1):

Les deux triangles sphériques ABC et DEG sont égaux si arc(AC) = arc(DG), angle(A) = angle(D) et angle(C) = angle(G).

[١٧] انْظُرْ موسوعة ابن هود: القضيّة ٢٤:

Si dans un triangle sphérique arc(AC) + arc(CB) = 2 drts alors extr(B) = angle(A).

لنَفْتَرِضِ الآن أنّ المَجْموعَ $\text{angl(C)} + \text{angl(G)}$ مُساوٍ لزاويتَيْن قائِمَتَيْن. فــإذاً المَجْموعُ $\text{angl(C)} + \text{angl(IHA)}$ مُساوٍ أيضاً لزاويتَيْن قائِمَتَيْن لأنّ

$$\text{angl(G)} = \text{angl(IHA)},$$

ولكنّ المَجْموعَ $\text{angl(CHK)} + \text{angl(IHA)}$ مُساوٍ لزاويتَيْن قائِمَتَيْن، إذاً وَفْــقَ القَضِيَّة[١٨] ٢١، يكونُ الضِلْعُ arc(HK) من المُثَلَّثِ HKC مُساوياً للضِلعِ الآخَرِ arc(KC) ولذلك يكونُ لهما نفــسُ الــنظير. وبالتــالي فــإنّ hom(HK) وَ hom(KC) مُتَساوِيَان في الحالتَيْن أكانــت الزاويتــان مُتَــساوِيَتَيْن أم كانتــا بمَجْموعِهِما مُساويَتَيْن لزاويتَيْن قائِمَتَيْن. ووَفْقَ القَضِيَّةِ ٣٥ يكونُ لدينا

$$\frac{\text{hom(IH)}}{\text{hom(KH)}} = \frac{\text{hom(IA)}}{\text{hom(AB)}} \cdot \frac{\text{hom(BC)}}{\text{hom(CK)}}.$$

وبما أنّ $\text{hom(CK)} = \text{hom(KH)}$، يصيرُ لدينا

$$\frac{\text{hom(IH)}}{\text{hom(CK)}} = \frac{\text{hom(IA)}}{\text{hom(AB)}} \cdot \frac{\text{hom(BC)}}{\text{hom(CK)}},$$

ولذلك فإنّ

$$\frac{\text{hom(IH)}}{\text{hom(BC)}} = \frac{\text{hom(IA)}}{\text{hom(AB)}}$$

وإذا استَخْدَمْنا العلاقتَيْن $\text{arc(IH)} = \text{arc(EG)}$ وَ $\text{arc(AI)} = \text{arc(ED)}$ نحــصلُ على

$$\frac{\text{hom(EG)}}{\text{hom(BC)}} = \frac{\text{hom(ED)}}{\text{hom(AB)}}.$$

[١٨] انْظُرْ موسوعَةَ ابنِ هود: القضيّتان ٢٠ وَ ٢١:

Dans un triangle sphérique ABC, on a:

$\text{angle(A)} = \text{angle(B)} \Leftrightarrow \text{arc(AC)} = \text{arc(BC)}$ (prop. n° 20 et n° 21).

وبالتالي فإنّ

$$\frac{\mathrm{hom}(AB)}{\mathrm{hom}(BC)}=\frac{\mathrm{hom}(DE)}{\mathrm{hom}(EG)} \quad .$$

وبالعكس،

٢) لنفترضِ الآن أنّ لدينا العلاقة التالية

$$\frac{\mathrm{hom}(AB)}{\mathrm{hom}(BC)}=\frac{\mathrm{hom}(DE)}{\mathrm{hom}(EG)} \quad .$$

لنستدلّ بنفسِ الأسلوبِ السابقِ. الضِلعان arc(DE) وَ arc(EG) من المثلّثِ EGD يُساويان، على الترتيب، الضِلعين arc(IA) وَ arc(IH) من المُثلّث BCA، يكون لدينا إذاً

$$\frac{\mathrm{hom}(BC)}{\mathrm{hom}(AB)}=\frac{\mathrm{hom}(IH)}{\mathrm{hom}(IA)} \quad ,$$

أو ما يُعادِلُ

$$\frac{\mathrm{hom}(IH)}{\mathrm{hom}(BC)}=\frac{\mathrm{hom}(IA)}{\mathrm{hom}(AB)} \quad .$$

وإذا ضربنا طَرَفَيِ النسبة بِ $\frac{\mathrm{hom}(BC)}{\mathrm{hom}(CK)}$ نحصلُ على

$$\frac{\mathrm{hom}(IH)}{\mathrm{hom}(BC)}\cdot\frac{\mathrm{hom}(BC)}{\mathrm{hom}(CK)}=\frac{\mathrm{hom}(IA)}{\mathrm{hom}(AB)}\cdot\frac{\mathrm{hom}(BC)}{\mathrm{hom}(CK)} \quad .$$

ولكن استناداً إلى القَضِيَّة[١٩] ٣٥ يكونُ لدينا

[١٩] لكي يكونَ تطبيقُ القضيّةِ ٣٥ مشروعاً في ظلِّ التشكيلةِ التي اعتمدَها مانالاوس وابنُ هود يجب أن نفترضَ أنّ كلَّ واحدٍ من المجموعين arc(AH) + arc(CA) وَ

$$\frac{\text{hom(IA)}}{\text{hom(AB)}} \cdot \frac{\text{hom(BC)}}{\text{hom(CK)}} = \frac{\text{hom(IH)}}{\text{hom(KH)}},$$

فإذاً

$$\frac{\text{hom(IH)}}{\text{hom(KH)}} = \frac{\text{hom(IH)}}{\text{hom(BC)}} \cdot \frac{\text{hom(BC)}}{\text{hom(CK)}} \;,$$

ولذلك فإنّ hom(KH) وَ hom(CK) مُتَساوِيَان.

وبالتالي، فإمّا arc(KH) = arc(CK) وإمّا المَجْموعُ arc(KH) + arc(CK) مساوٍ لنصفِ محيطِ دائِرَةٍ عظيمة. في الحالة الأولى، وَفْقَ القَضِيَّة ٢٠ (انْظُر الحاشِية ١٨) يكونُ مَجْموعُ الزاويتَيْن angle(IHA) وَ angle(C) مُساوياً لقائِمَتَيْن. وفي الحالةِ الثانِيَةِ، وَفْقَ القَضِيَّة ٢٤ (انْظُرِ الحاشِية .١٧) تكونُ الزاويتان angle(IHA) وَ angle(C) مُتَساوِيَتَيْن، وبالتالي فإنّ الزاويتَيْن angle(G) وَ angle(C) تكونان إمّا مُتَساوِيَتَيْن إمّا مساويتَيْن لقائِمَتَيْن إذا جُمِعَتا.

رغم التفاوتِ بالتسمية بين مُصطلحَي"النظير" عِنْدَ ابن هود و"الجيب" عِنْدَ مانالاوس، نَجِدُ في هذه القَضِيَّةِ شِبْهَ تطابُقٍ حَرْفِيٍّ في نصّيّ الكاتبَيْن. لنتناولِ الآن النصَّ المَنسوبَ إلى مانالاوس لهذه القَضِيَّة[٢٠].

arc(AB) + arc(AI) أصغرُ من نصفِ محيطِ دائرةٍ عظيمة، وهذا ما يعادلُ أن نفترضَ أنّ كلّ واحدٍ من المجموعين arc(DG) + arc(CA) وَ arc(AB) + arc(DE) أصغرُ من نصفِ محيط دائرةٍ عظيمة.

[٢٠] انْظُرْ ص. ٦٤–٦٥ من *كُرَوِيّات* مانالاوس–ابن عراق (القضية ٢، المقالة ٣).

"الشكل الثاني، إذا كانت زاويتان من زوايا شكلين من الأشكال ذوات الأضلاع الثلثة متساويتين؛ وكانت زاويتان أُخريان <من زواياهما> إمّا متساويتين وإمّا مساويتين إذا جُمعتا لزاويتين قائمتين، فإنّ نسبة جيبَي الضلعين اللّذين يوتّران الزاويتين المتساويتين <إلى جيبَي الضلعين الآخرين اللّذين يوتّران الزاويتين الأُخرَيَيْن المتساويتين> أو المساويتين لقائمتين <إذا جُمعتا>، هما نسبتان متساويتان، وعكس ذلك أيضا؛ فليكن شكلان ذوا ثلاثة أضلاع، عليهما ا ب ﺟ د ﻫ ز، ولتكن الزاوية التي عند ا من أحدهما مساوية للزاوية التي عند د من الآخر؛ ولتكن الزاويتان منهما اللّتان عند نقطتَي ﺟ ز إمّا متساويتين وإمّا مساويتين لزاويتين قائمتين <إذا جُمعتا>؛ فأقول إنّ نسبة جيب ا ب إلى جيب ب ﺟ كنسبة جيب د ﻫ إلى جيب ﻫ ز؛ <برهانه :> لأنّا نُخرج قوسَي ﺟ ا ح ب ا ط ونجعل قوس ا ح مساويةً لقوس د ز، وزاوية ا ح ط لزاوية ﻫ ز د؛ ونتمّم الصورة فتكون قوس ا ط مساوية لقوس د ﻫ، وقوس ط ح لقوس ﻫ ز؛ ولأنّ زاويَتَي ب ﺟ ا ا ح ط إمّا أن تكونا متساويَتَين، وإمّا مساويَتَين لزاويتين قائمتين إذا جُمعتا، يكون جيب قوس ﺟ ك مساوياً لجيب قوس ح ك؛ ولأنّ الصورة على ما هي عليه، تكون نسبة جيب قوس ك ﺟ إلى جيب قوس ب ﺟ مؤلّفةً من نسبة جيب قوس ك ح إلى جيب قوس ح ط ومن نسبة جيب قوس ط ا إلى جيب قوس ا ب؛ ولكنّ جيب قوس ﺟ ك مساوٍ لجيب قوس ك ح <فتكون نسبة جيب قوس ح ط إلى جيب قوس ب ﺟ كنسبةً جيب قوس ط ا إلى جيب قوس، ب ا> وإذا بدّلنا أيضا تكون متناسبة؛ ولكن قوس ح ط مساوية لقوس ﻫ ز، وقوس ا ط مساوية لقوس، د ﻫ، فنسبة جيب قوس ﺟ ب إلى جيب قوس ا ب كنسبة جيب قوس ﻫ ز إلى جيب قوس ﻫ د. أيضا فإنّا نجعل الزاوية <التي عند نقطة ا مساويةً للزاوية> التي عند نقطة د، ولتكن نسبة جيب قوس ﺟ ب إلى جيب قوس ا ب كنسبة جيب قوس ﻫ ز إلى جيب قوس ﻫ د، فأقول إنّ الزاويتين اللّتين عند نقطتي ﺟ ز إمّا أن تكونا متساويتين وإمّا أن تكونا إذا جُمعتا معادلتين لقائمتين؛ لأنّا إذا عملنا مثل العمل المذكور كانت نسبة جيب ﺟ ب إلى جيب ا ب كنسبة جيب ط ح إلى جيب ط ا، وأيضا إذا بدّلنا كانت متناسبة؛ وإذا كانت الصورة على ما هي عليه فإنّ جيب قوس ك ح يكون مساويا لجيب قوس ك ﺟ، وتكون لذلك زاويتا ط ح ا ا ﺟ ب اللّتان عند نقطتي ﺟ ز إما متساويتين وإما مساويتين إذا جُمعتا لزاويتين قائمتين؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

يورِدُ ابنُ عراق تعليقاً على بُرْهانِ مانالاوس الواردِ في القضيةِ الـــسابقةِ فيكتبُ[٢١]:

وإذا تأمّل متأمّلٌ وقاس بين عملنا في الشكل المُغني وما عمله مانالاوس في الشكل القطّاع وكثرة ما يحتاج إليه من البراهين وعرف أنّه إذا كانت زاويتا ا د في المثلّثين متساويتين ونسبة جيب ب جـ إلى جيب ب ا كنسبة جيب هـ ز إلى جيب هـ د، علم بسرعة من غير إطالة كلام وشروع في البرهان سوى التقدّم في الشكل المغني الذي يقوم مقام الشكل القطّاع، أنّ زاويتَي ز جـ إذ جيباهما يكونان متساويين، إمّا متساويتان أو <معاً> معادلتان لزاويتين قائمتين،

شَرْحُ تعليقِ ابنِ عراق

وَفْقَ مُبَرْهَنَةِ الجيوبِ يكونُ لدينا[٢٢] (انْظُرِ الشَكْلَ ٤)

$$\frac{\text{Sin(angl(G))}}{\text{Sin(arc(DE))}} = \frac{\text{Sin(angl(D))}}{\text{Sin(arc(GE))}},$$

$$\frac{\text{Sin(angl(C))}}{\text{Sin(arc(AB))}} = \frac{\text{Sin(angl(A))}}{\text{Sin(arc(CB))}}.$$

ومن جهةٍ أُخرى لدينا

$$\text{angle(A)} = \text{angle(D)}$$

وَ

[٢١] انْظُرْ ص. ٦٥ من المَرْجِع السابق.

[٢٢] انْظُرِ الحاشِية ٦.

$$\frac{\mathrm{Sin(arc(GE))}}{\mathrm{Sin(arc(DE))}} = \frac{\mathrm{Sin(arc(CB))}}{\mathrm{Sin(arc(AB))}}.$$

ولذلك فإنّ

$$\mathrm{Sin(angl(G))} = \mathrm{Sin(angl(C))};$$

وبالتالي فالزاويتان angle(C) وَ angle(G) مُتَساوِيَتان أو مُعادلتان لقائِمَتَيْن إذا جُمِعَتا.

من الواضحِ هنا أنّ تطبيقَ مُبَرْهَنَةِ الجيوب يُغنينا عن استخدامِ أبْنِيَةٍ إضافيّةٍ غيرِ ضروريّةٍ كان لا مَفَرَّ من استخدامِها لتوفيرِ شُروطِ إمكانِيَّةِ تطبيقِ مُبَرْهَنَةِ مانالاوس لحلِّ المَسْأَلَةِ المطروحة. وكما أشار ابنُ عراق، استناداً إلى قاعِدَةِ الجيوب، يُصبِحُ الأمرُ بديهِيّاً "من غيرِ إطالَةِ كلامٍ وشروعٍ في البُرهان".